ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
проф. Л. Д. ЛАНДАУ

ТОМ ПЕРВЫЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

Л. ЛАНДАУ и Л. ПЯТИГОРСКИЙ

МЕХАНИКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1940 ЛЕНИНГРАД

АННОТАЦИЯ

Книга представляет собой изложение механики как части теоретической физики на основе принципа наименьшего действия. Изложение рассчитано на аспирантов физиков-теоретиков и экспериментаторов, а также студентов старших курсов университетов.

Необходимая подготовка читателей — университетский курс теоретической механики, векторная и тензорная алгебра.

Л. Ландау и Л. Пятигорский. Теоретическая физика. Том I. Механика. Государственное издательство технико-теоретической литературы. ОГИЗ 1940 г. Индекс Т-40-5-4. Изд. № 94.
Редактор *И. В. Кузнецов* Технический редактор *Е. Г. Шпак*.

Сдано в набор 5/III 1938 г. Подписано к печати 26/I 1939 г. Формат 60×92/16. Объем 6 1/2 Бум. л. 12 1/2 печ. л., 14,78 уч.-авт. л., 102400 тип. знаков в печ. л. Тираж 8.000. Бумага Окуловской ф-ки. Уполномоченный Главлита № А-2091. Заказ № 212. Цена 5 р. 50 к., перепл. 1 р. 50 к.

4-я типография ОГИЗ'а РСФСР, треста «Полиграфкнига» им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс теоретической физики намечается из следующих частей: 1. Механика, 2. Статистика, 3. Теория поля, 4. Макроскопическая физика, 5. Квантовая механика.

Данная книга посвящена механике. Она рассчитана на физиков и студентов физических вузов. Параграфы 14, 17, 28, 47, 48, 51 и вся последняя глава, кроме 52 и 55 параграфов, предназначены для людей, специально интересующихся теоретической физикой, и всяким другим читателем могут быть опущены.

Для чтения этой книги необходимо умение свободно диференцировать и интегрировать и знакомство с простейшими диференциальными уравнениями. Кроме того, необходимо знание векторной и тензорной алгебры. Так как в литературе нет достаточно простых изложений тензорной алгебры, мы сочли необходимым поместить в конце книги посвященное ей небольшое математическое приложение.

Настоящая книга является развитием прочитанного мною курса лекций и оформлена мною совместно с Л. Пятигорским.

Л. Ландау

Москва
Апрель 1938 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Физика, как известно, состоит, собственно говоря, из двух наук: физики экспериментальной и физики теоретической. Громадное количество известных нам физических законов может быть выведено из очень небольшого числа весьма общих соотношений; однако такое выведение, так же как и установление самих основных законов, требует своеобразных методов и поэтому составляет задачу особой науки — теоретической физики.

Для построения своих выводов и заключений теоретическая физика пользуется приемами и методами математики. Однако от последней она резко отличается непосредственной связью с результатами эксперимента. Не говоря уже о том, что установление общих законов возможно только на основе экспериментальных данных, даже нахождение следствий из общих законов нуждается в предварительном экспериментальном изучении явлений. Без такого изучения часто невозможно установить, какие из громадного числа участвующих факторов существенны, а какими можно пренебречь. После того как получены уравнения, учитывающие только существенные факторы, задача теоретической физики, собственно говоря, в основном заканчивается. Дальнейшее применение полученных уравнений к более или менее сложным конкретным случаям является уже скорее предметом математики и изучается отделом математики, носящим название математической физики.

Теоретическая физика ставит себе целью нахождение физических законов, т. е. установление зависимости между физическими величинами. Определение же численных значений физических величин, вообще говоря, в ее задачи не входит. Эксперимент справляется с этим кругом вопросов относительно настолько легко, что в огромном большинстве случаев отсутствует самая необходимость подобных вычислений, которые к тому же потребовали бы громадной затраты времени и труда. Исключение составляют простейшие случаи, когда численные значения величин непосредственно вытекают из теории.

Следует отметить, что поскольку задача теории состоит всегда в установлении зависимостей между различными величинами, характеризующими данное явление, теория явления может быть построена только в том случае, когда в природе такая связь действительно существует. Сплошь и рядом, однако, между представляющими интерес величинами никакой связи вовсе не существует, т. е. эти величины могут встречаться в природе в самых различных комбинациях. Таким образом отсутствие теории какого-либо явления далеко не всегда означает, что оно не поддается объяснению. Отсутствие закономерности при этом так же может вытекать из общих законов, как в других случаях сами закономерности.

Громадную роль в теоретической физике играет приближенное рассмотрение. Прежде всего совершенно точные законы природы нам еще неизвестны. Все известные нам общие законы являются приближенными, хотя в громадном большинстве случаев даваемая ими точность является весьма высокой. Более того, требование абсолютной точности к физическим законам и не предъявляется. Достаточно, если существует какая-то заранее установленная область явлений, в которой точность данного закона удовлетворяет поставленной задаче. Так, мы спокойно применяем ньютоновскую механику к движению снаряда, хотя нам известно не только то, что эта механика не является абсолютно точной, но и то, что в нашем распоряжении имеется значительно более точная релятивистская механика.

Благодаря этому в теоретической физике рядом с более точными теориями прекрасно уживаются теории, неточность которых давно установлена, — поскольку они вполне сохраняют свою ценность для определенной области явлений (такие теории обычно называются классическими). Всякая логически замкнутая теория, верность которой была с известной степенью точности экспериментально доказана, никогда не теряет своего значения, и всякая более точная последующая теория охватывает ее как приближенный результат, справедливый в некоторых частных случаях. Это, конечно, не относится к теориям, страдающим внутренними противоречиями, которые всегда имеют значение только одного из этапов развития теоретической физики.

Таким образом приближения играют очень важную роль в общих физических теориях. Не менее велика, однако, их роль и при выводе из общих теорий конкретных физических законов. Слишком точные вычисления с учетом несущественных факторов не только бесплодны и излишне усложняют результат расчета, но могут даже привести к тому, что существующие в данном явлении закономерности вообще выпадут из рассмотрения. Дело в том, что приближенным может оказаться не только данный конкретный вид закона, но и само существование функциональной связи между характеризующими данное явление величинами, и за пределами данной точности эти величины могут встречаться в произвольных комбинациях.

Определение степени приближения, с которой данное явление должно рассматриваться, чрезвычайно существенно при его теоретическом исследовании. Особенно грубой ошибкой является тщательное вычисление с учетом всевозможных мелких поправок и применением слишком точных общих теорий в случаях, когда одновременно с этим пренебрегают гораздо большими величинами.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Пространство и время

Основными понятиями теоретической физики являются понятия пространства и времени. Во всех областях физических явлений каждый закон в явном или скрытом виде содержит в себе пространственно-временные соотношения — расстояния и промежутки времени.

Расстояния измеряются масштабами, основным свойством которых является то, что два однажды совпавших по длине масштаба всегда остаются равными друг другу, т. е. при каждом последующем наложении совпадают, если только внешние условия остаются неизменными. Тела, из которых можно изготовлять такие масштабы, называются твердыми.

Промежутки времени измеряются часами, причем роль последних может выполнять любой механизм, совершающий повторяющийся процесс, протекающий в неизменных стандартных условиях.

Для полного задания положения точки недостаточно указания лишь одного расстояния. Опыт показывает, что для определения положения некоторой точки по отношению ко всем остальным, необходимо задание трех расстояний, называемых координатами точки. Это свойство пространства носит название *трехмерности.* Три координаты вполне определяют положение точки по отношению к некоторому твердому телу, которое носит название *системы отсчета.* Выбор системы отсчета не однозначен — можно взять любую из бесчисленного множества систем, как угодно движущихся друг относительно друга.

Представления о пространстве, времени и движении, заимствованные из повседневного опыта, оказываются применимыми к огромной области физических явлений. Эти представления обычно обозначаются физиками как классические[1]). Основным свойством классических представлений о размерах тел и промежутках времени является их абсолютность: достаточно хороший масштаб всегда имеет одну и ту же длину, независимо от того, как он движется относительно наблюдателя; двое часов, имеющих одинаковый ход и приведенные однажды в соответствие друг с другом, показывают одно и то же время независимо от того, как они движутся.

Согласно классическим представлениям пространство является „плоским", т. е. удовлетворяет геометрии Эвклида. Геометрические свойства такого пространства одинаковы в различных точках, а в каждой точке одинаковы во всех направлениях, т. е. пространство *однородно* и *изотропно.*

При формулировке законов теоретической физики весьма важную роль играет понятие материальной точки. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Положение материальной точки в пространстве мы будем характеризовать ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$, компоненты которого

---

[1]) Пределы применимости классических представлений даются теорией относительности и теорией квант.

по осям декартовой системы координат равны декартовым координатам точки x, y, z.

Согласно классическим представлениям о пространственно-временных свойствах движения материальная точка в каждый момент времени находится в определенном месте пространства — имеет определенные координаты. При движении материальной точки координаты ее изменяются. Соответственно этому радиус-вектор $\mathbf{r}$ материальной точки можно рассматривать как функцию от времени: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. *Скорость* $\mathbf{v}$ материальной точки равна производной от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени t:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1,1}$$

Ускорение $\mathbf{w}$ определяется второй производной от радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{1,2}$$

Производные по времени часто обозначают точкой над соответствующей величиной. Так, например:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}, \qquad w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

Механика изучает движение систем материальных точек. Число независимых координат, необходимых для описания движения механической системы, называется *числом степеней свободы* этой системы. Материальная точка, очевидно, имеет три степени свободы, а система, состоящая из N материальных точек $3N$ степеней свободы.

Помимо декартовых координат $x, y, z, \ldots$ можно применять и любые другие координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, выбирая их так, чтобы они возможно удобнее описывали движение. Совокупность каких-либо величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$, вполне характеризующих положение системы, называют *обобщенными координатами*, а их производные по времени

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \dot{q}_n = \frac{dq_n}{dt},$$

обобщенными скоростями.

Если известно состояние механической системы в некоторый момент времени, то можно определить состояние этой системы и во всякий другой момент времени. При этом оказывается, что состояние системы вполне определяется заданием координат и скоростей. Ускорения же не могут быть заданы произвольно и являются функциями координат и скоростей. Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, носят название *уравнений движения системы*.

Основной задачей классической (основанной на классических представлениях о пространстве, времени и движении) механики является изучение движения любой механической системы путем определения ее координат как функции времени по заданным начальным условиям, т. е. по значениям координат и скоростей в некоторый начальный момент времени.

Задачи

1. Определить число степеней свободы:

а) точки, движущейся по поверхности;

б) системы двух точек, находящихся на заданном расстоянии одна от другой;

в) системы двух точек, находящихся на заданном расстоянии одна от другой, если одна из них связана с поверхностью, а другая с линией;

г) трех точек с постоянными расстояниями между ними.

§ 2. Принцип наименьшего действия

Наиболее общим принципом механики является *принцип наименьшего действия* или принцип Гамильтона. Этот принцип выражает собой закон движения любой механической системы. Согласно принципу наименьшего действия всякая механическая система характеризуется функцией $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, называемой *функцией Лагранжа* данной системы и зависящей, кроме времени, только от координат и скоростей, причем движение системы удовлетворяет следующему условию:

Пусть в момент времени $t=t_1$ система занимает положение, характеризуемое координатами $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \ldots, q_n^{(1)}$, а в момент времени $t=t_2$ — положение $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \ldots, q_n^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что интеграл

$$S=\int L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt,$$

называемый *действием*, для действительного движения имеет минимальное значение по сравнению с теми значениями, которые он принимает для всех движений, близких к действительному.

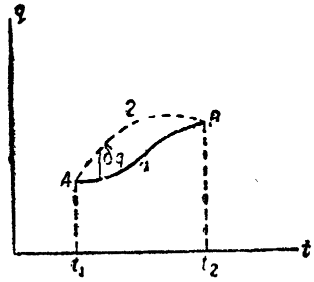


Рис. 1.

Чтобы получить возможность воспользоваться геометрической терминологией, вообразим пространство с числом измерений, на единицу большим числа степеней свободы. Если число степеней свободы системы обозначим через n, то из $n+1$ координатных осей n осей пусть соответствуют координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а $n+1$-я ось — времени t. Каждому положению или конфигурации системы в определенный момент времени сопоставим в этом пространстве точку с координатами, равными координатам системы и моменту времени. Кривая линия, описываемая этой точкой, вполне характеризует движение системы.

Обозначим через A и B точки в $n+1$-мерном пространстве, соответствующие положениям системы в моменты времени $t=t_1$ и $t=t_2$. При заданных внешних условиях система движется между этими точками по определенной кривой $A\ 1\ B$ (рис. 1). Кроме этой кривой, соответствующей действительному движению, рассмотрим ряд близких к ней кривых $A\ 2\ B$, соответствующих возможным движениям. Согласно принципу наименьшего действия движение системы будет происходить по такой кривой, вдоль которой интеграл от функции Лагранжа имеет минимальное значение

$$S=\int L(q_i, \dot{q}_i, t)\,dt=\min$$

по сравнению со значениями этого интеграла, взятого между точками A и B вдоль кривых, близких к действительной.

Соответствующая задача нахождения функций, дающих экстремальные значения интегралу, решается операцией, носящей название варьирования. Принцип наименьшего действия называется поэтому вариационным принципом. Подчеркнем различие между диференциалом функции и ее вариацией. В то время как диференциал представляет собой приращение функции при бесконечно малом приращении аргумента, вариация функции означает приращение самой функции, а вариация интеграла — приращение этого интеграла при бесконечно малом изменении вида функций, от которых зависит подинтегральное выражение.

Обозначая символ варьирования через δ, мы можем принцип наименьшего действия записать в виде

$$\delta S = \delta \int L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0, \tag{2,1}$$

где δS есть вариация действия, соответствующая переходу в функции Лагранжа, стоящей под знаком интеграла, от функций $q_i(t)$, описывающих действительное движение, к близким им функциям $q_i'(t)$. Ввиду независимости координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ это уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\delta_1 S = 0, \quad \delta_2 S = 0, \quad \delta_3 S = 0, \quad \ldots, \quad \delta_n S = 0,$$

где $\delta_i S$ есть вариация действия при варьировании одной только координаты $q_i(t)$.

Рассмотрим какое-либо одно из этих уравнений. Соответствующую координату обозначим через q. Необходимое условие минимума действия, относящееся к этой координате, имеет вид

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0,$$

где из переменных, от которых зависит функция Лагранжа, кроме времени, указана лишь координата, которая варьируется.

Перейдем от функции $q = q(t)$, описывающей действительное движение, к функции $q' = q(t) + \delta q(t)$, где $\delta q(t)$ — вариация независимой переменной q. При этом скорость будет уже не $\dot{q}$, а $\dot{q}' = \dot{q} + \frac{d\,\delta q}{dt}$, а действие перейдет от значения S к значению

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q + \delta q;\ \dot{q} + \frac{d\,\delta q}{dt},\ t\right) dt.$$

Величины δq, $\frac{d\,\delta q}{dt}$ и δS являются, понятно, величинами бесконечно малыми. Разлагая функции Лагранжа в ряд и пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков, получим

$$L\left(q + \delta q,\ \dot{q} + \frac{d\,\delta q}{dt},\ t\right) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\,\delta q}{dt}$$

Подставляя это выражение, находим:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d\,\delta q}{dt}\,dt$$

или, интегрируя второй интеграл по частям:

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt,$$

или

$$\delta S=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)_{t_2}(\delta q)_{t_2}-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)_{t_1}(\delta q)_{t_1}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\,dt=0. \quad (2,2)$$

Вследствие того что в точках A и B действительная кривая и все возможные кривые совпадают, мы должны прежде всего положить $(\delta q)_{t_1}=(\delta q)_{t_2}=0$, вследствие чего два первых члена в выражении (2,2) вариации действия исчезают. Остается интеграл, который должен равняться нулю при произвольных значениях δq. Это возможно только в том случае, если подинтегральное выражение равно нулю при произвольных значениях вариаций координаты q. Таким образом мы получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0.$$

Это и есть одно из уравнений движения.

Для системы с n степенями свободы мы получим всего n уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\dots,\ n), \qquad (2,3)$$

называемых *уравнениями движения Лагранжа*. Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы системы. Все они являются обыкновенными диференциальными уравнениями второго порядка с n неизвестными функциями q_i от одной независимой переменной t. Такая система имеет, как известно, общее решение, зависящее от $2n$ произвольных постоянных

$$\begin{aligned}q_1&=q_1(t,\ C_1,\ C_2,\dots,\ C_{2n}),\\ q_2&=q_2(t,\ C_1,\ C_2,\dots,\ C_{2n}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ q_n&=q_n(t,\ C_1,\ C_2,\dots,\ C_{2n}).\end{aligned}$$

Для полного определения движения механической системы с n степенями свободы необходимо знание начальных условий, характеризующих состояние системы в некоторый начальный момент времени. Как уже было указано в § 1, в качестве таких начальных условий вполне достаточно задание начальных значений координат и скоростей. Ускорения же $\ddot q_1=\frac{d\dot q_1}{dt}$, $\ddot q_2=\frac{d\dot q_2}{dt},\dots,\ \ddot q_n=\frac{d\dot q_n}{dt}$ при заданных внешних условиях являются определенными функциями координат и скоростей; уравнения движения как раз и выражают эту функциональную зависимость.

Если для какого-нибудь момента времени $t = t_0$ заданы $2n$ величин $\overset{0}{q}_1, \overset{0}{q}_2, \ldots, \overset{0}{q}_n$; $\overset{0}{\dot q}_1, \overset{0}{\dot q}_2, \ldots, \overset{0}{\dot q}_n$, то все произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ могут быть исключены и движение определяется полностью. Впрочем вместо указанных значений координат и скоростей в качестве начальных условий иногда даются начальные значения других механических величин. Вообще начальные условия могут быть весьма разнообразны, лишь бы они были достаточны для определения $2n$ произвольных постоянных интегрирования.

Задачи

Найти ускорения, если задана функция Лагранжа:

1) $L = \frac{\dot q^2}{2} - \cos q$. *Отв.* $\ddot q = \sin q$.

2) $L = \frac{1 + q^2}{4}\dot q^2 - \frac{q^2}{2}$. *Отв.* $\ddot q = -q\,\frac{\dot q^2 + 2}{q^2 + 1}$.

3) $L = \frac{1 + t}{2}\dot q^2 + (1 + t)\sin q$. *Отв.* $\ddot q = \cos q - \frac{\dot q}{1 + t}$.

4) $L = -\sqrt{1 - \dot x^2} + x$. *Отв.* $\ddot x = (1 - \dot x^2)^{3/2}$.

5) $L = \frac{1}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) + (x\dot y - y\dot x)$. *Отв.* $\ddot x = 2\dot y,\ \ddot y = -2\dot x$.

6) $L = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{1}{r}$. *Отв.* $\ddot r = r\dot\varphi^2 + \frac{1}{r^2},\ \ddot\varphi = -\frac{2\dot r\,\dot\varphi}{r}$.

7) $L = \frac{1}{2}(q_2\dot q_1^2 + q_1\dot q_2^2) - q_1 q_2$. *Отв.* $\ddot q_1 = -1 - \frac{\dot q_1\dot q_2}{q_2} + \frac{\dot q_2^2}{2q_2}$; $\ddot q_2 = -1 - \frac{\dot q_1\dot q_2}{q_1} + \frac{\dot q_1^2}{2q_1}$.

§ 3. Принцип относительности

Для изучения физических явлений необходимо располагать некоторой системой отсчета. Можно взять любую из бесчисленного множества как угодно движущихся друг относительно друга систем отсчета. Однако законы природы в различных системах отсчета имеют различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что даже законы совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы природы выглядели бы возможно более просто; очевидно, что такая система отсчета оказывается наиболее удобной для описания физических явлений.

При нахождении такой системы отсчета мы будем исходить из рассмотрения самого простого случая движения. Таким случаем является движение материальной точки, настолько отдаленной от всех других тел, что взаимодействием между этими телами и материальной точкой можно пренебречь. О таком движении материальной точки говорят, что оно является *свободным*.

Возьмем теперь произвольную систему отсчета и будем изучать ее свойства при помощи свободно движущейся материальной точки. Допустим, что в начальный момент времени в этой системе отсчета точка покоилась. Тогда в следующий момент времени точка, вообще говоря, не будет более покоиться — она начнет двигаться в некотором направлении. В этом смысле можно сказать, что произвольная система отсчета в отношении своих свойств не является однородной и изотропной.

Оказывается, что всякие два свободно движущихся тела могут покоиться друг относительно друга сколь угодно долго. Поэтому движение можно относить к системе координат, неподвижно связанной с какими-либо свободно движущимися телами. Такая система отсчета носит название *инерциальной системы*. В инерциальной системе отсчета все направления физически эквивалентны и различные точки пространства по своим физическим свойствам одинаковы, т. е. эти системы отсчета механически однородны и изотропны.

Рассмотрим теперь свободное движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Однородность времени можно учесть, считая, что функция Лагранжа для этой точки имеет одинаковый вид в различные моменты времени, т. е. не зависит от времени явно. Поэтому если $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор, соответствующий положению точки, а $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ — ее скорость, то

$$L = L(\mathbf{r},\ \mathbf{v}).$$

Однако вследствие однородности пространства функция Лагранжа не может зависеть явно и от координат; поэтому

$$L = L(\mathbf{v}).$$

Более того, так как пространство изотропно, все направления механически ничем друг от друга не отличаются, функция Лагранжа не может зависеть от направления скорости, т. е. является функцией абсолютной величины ее $\mathbf{v}^2 = v^2$,

$$L = L(v^2).$$

Составим теперь уравнения Лагранжа. Ввиду независимости функции Лагранжа от радиуса-вектора $\mathbf{r}$, ясно, что $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$ [1]. Поэтому уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, зависящий, очевидно, от начальных условий, а левая часть равенства является функцией скорости $\mathbf{v}$. Решая это уравнение относительно скорости, найдем

$$\mathbf{v} = \mathrm{const}. \qquad (3,1)$$

[1]) Под производной величины по вектору мы подразумеваем вектор, компоненты которого равны производным этой величины по компонентам вектора.

Итак в инерциальной системе отсчета свободное движение материальной точки совершается с постоянной скоростью. Это утверждение известно под названием *закона инерции* (первый закон Ньютона). В частности, как мы и предполагали ранее, если в некоторый момент времени скорость точки равна нулю, то точка будет продолжать покоиться неограниченно долго.

Если мы рассмотрим систему отсчета, движущуюся относительно инерциальной системы произвольным образом, то она, конечно, уже не будет, вообще говоря, инерциальной системой. Отсюда не следует, однако, что существует только одна инерциальная система отсчета. Легко видеть, что таких систем существует бесчисленное множество, причем все инерциальные системы отсчета совершают друг относительно друга равномерное поступательное движение.

Для инерциальных систем отсчета справедлив *принцип относительности*, согласно которому все инерциальные системы по своим физическим свойствам совершенно эквивалентны друг другу. В соединении с абсолютностью времени этот принцип носит название *принципа относительности Галилея*. В соответствии с эквивалентностью всех инерциальных систем отсчета, уравнения движения любой механической системы при переходе от одной из них к другой остаются неизменными.

Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, характеризующий положение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета K в некоторый момент времени t. Обозначим через $\mathbf{r}'$ и t' радиус-вектор и время того же события в другой инерциальной системе отсчета K', скорость которой относительно K обозначим через $\mathbf{v}_0$.

Согласно классическим представлениям о пространстве и времени, формулы преобразования координат и времени имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t, \\ t &= t', \end{aligned}\right\} \tag{3,2}$$

причем последнее равенство выражает собой абсолютный ход времени, а первое — абсолютность размеров. Эти преобразования называются *преобразованиями Галилея*.

Продиференцировав первое равенство (3,2) по времени, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \tag{3,3}$$

Эта простая формула представляет собой закон сложения скоростей: скорость $\mathbf{v}$ относительно системы отсчета K складывается из скорости $\mathbf{v}'$ относительно другой системы отсчета K' и скорости $\mathbf{v}_0$ системы K' относительно K.

Взяв вторую производную от (3,2) и имея в виду, что $\mathbf{v}_0$ есть величина постоянная, мы получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}, \tag{3,4}$$

т. е. равенство ускорений во всех инерциальных системах отсчета.

В связи с отсутствием избранной, „абсолютной“ системы отсчета лишено смысла и понятие абсолютного покоя: если тело покоится в одной из инерциальных систем отсчета, то относительно всех других оно движется с той или иной постоянной скоростью и нет никаких оснований предпочесть одну из инерциальных систем другим. Аналогичным образом лишено смысла и понятие абсолютной скорости — только относительная скорость тел друг относительно друга имеет физический смысл. Зато имеет смысл понятие абсолютного ускорения, поскольку, как мы выяснили, ускорение в различных инерциальных системах отсчета одинаково, а отличие инерциальных систем отсчета от неинерциальных имеет абсолютный характер. В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы всегда будем пользоваться инерциальной системой отсчета.

Из галилеевского принципа относительности непосредственно следует, что взаимодействие тел распространяется в пространстве мгновенно, т. е. если изменить состояние одного тела, то уже непосредственно вслед за этим можно обнаружить хотя бы очень слабое изменение во взаимодействующих с ним телах, как бы далеко они ни находились. В самом деле, если бы взаимодействие распространялось с конечной скоростью, то, как видно из закона сложения скоростей (3,3), эта скорость была бы различной в различных системах отсчета. Таким образом можно было бы физически отличить эти системы друг от друга, что противоречит принципу относительности.

Ввиду того что скорость распространения взаимодействия тел принимается бесконечно большой, говорят, что в классической механике имеет место дальнодействие.

§ 4. Функция Лагранжа свободно движущейся материальной точки

Для конкретного применения принципа наименьшего действия и вытекающих из него уравнений движения Лагранжа нужно знать вид функции Лагранжа для данной механической системы.

Прежде всего обратим внимание на то, что функция Лагранжа определяется не однозначно, т. е. одну и ту же систему можно характеризовать различными функциями Лагранжа. Пусть $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ — функция Лагранжа некоторой механической системы. Прибавляя в ней полную производную по времени от любой функции координат и времени, которую обозначим через $f(q_i, t)$, получим новую функцию

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t). \tag{4,1}$$

Вычислим интеграл S' от этой функции, взятый в тех же пределах, что и действие:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} f(q_i, t)\, dt,$$

или

$$S' = S + f(q_i^{(2)};\ t_2) - f(q_i^{(1)};\ t_1).$$

Составим теперь вариацию функции S', т. е. $\delta S'$. При варьировании $q_i^{(1)}$, t_1 и $q_i^{(2)}$, t_2 не изменяются. Поэтому $\delta S' = \delta S$. Отсюда видно, что условие $\delta S' = 0$ эквивалентно условию $\delta S = 0$, т. е. изменение функции Лагранжа на полную производную от произвольной функции координат и времени не изменяет уравнений движения.

Функция Лагранжа определена, следовательно, с точностью до полной производной от любой функции координат и времени. Переходя к определению вида функции Лагранжа, рассмотрим сначала простейший случай — свободное движение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета. Как мы уже видели, вследствие однородности времени, однородности и изотропии пространства функция Лагранжа в этом случае может зависеть лишь от квадрата вектора скорости: $L = L(v^2)$. Какова же эта зависимость? Для того чтобы выяснить это, воспользуемся принципом относительности Галилея. Если инерциальная система отсчета K движется относительно инерциальной системы отсчета K' с бесконечно малой скоростью ε, то $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \varepsilon$. Так как уравнения движения во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид, то функция Лагранжа $L(v^2)$ должна при таком преобразовании перейти в функцию L', которая если и отличается от $L(v^2)$, то самое большее лишь на полную производную от функции координат и времени. Таким образом

$$L' = L(v'^2) = L([\mathbf{v} + \varepsilon]^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням ε и пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим

$$L(v^2 + 2\mathbf{v}\,\varepsilon + \varepsilon^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \varepsilon,$$

откуда следует

$$L'(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \varepsilon.$$

Второй член правой части этого равенства будет полной производной по времени только в том случае, если он зависит от скорости $\mathbf{v}$ линейно. Поэтому $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ от скорости не зависит, т. е. есть величина постоянная. Отсюда следует, что функция Лагранжа в рассматриваемом случае прямо пропорциональна квадрату скорости:

$$L = av^2.$$

Из того, что функция Лангранжа, пропорциональная квадрату скорости, удовлетворяет принципу относительности Галилея в случае бесконечно малого преобразования скорости, очевидно, непосредственно следует, что функция Лагранжа инвариантна и для случая конечной скорости $\mathbf{v}_0$ системы отсчета K относительно K'. И действительно

$$L' = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)^2 = av^2 + 2a\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v} + av_0^2$$

или

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} + av_0^2 t).$$

Первый член преобразованной функции Лагранжа имеет тот же вид, что и в системе отсчета K, а второй можно отбросить.

Если бы вместо $L=av^2$ мы взяли, например, $L=av^4$, то мы имели бы

$$L'=av'^4=av^4+4av^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0+2av^2v_0^2+4a(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0)^2+4av_0^2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0),$$

или

$$L'=L+\varphi(\mathbf{v}),$$

где функция $\varphi(\mathbf{v})$ уже не является полной производной и отбросить ее нельзя.

Таким образом мы можем утверждать, что искомой функцией Лагранжа для свободно движущейся материальной точки в инерциальной системе отсчета является функция $L=av^2$. Постоянную a обычно пишут в виде $\frac{m}{2}$, так что

$$L=\frac{m}{2}v^2. \tag{4,2}$$

Величина m называется *массой* материальной точки.

Легко видеть, что масса m не может быть отрицательной. В самом деле, согласно принципу наименьшего действия, для действительного движения материальной точки из точки A пространства в точку B интеграл

$$S=\int\limits_A^B\frac{mv^2}{2}dt$$

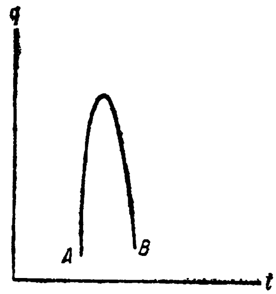


Рис. 2.

имеет *минимум*. Если бы масса была отрицательной, то для траекторий, по которым частица сначала быстро удаляется от A, а затем быстро приближается к B (рис. 2), интеграл действия принимал бы сколь угодно большие по абсолютной величине отрицательные значения, т. е. *не имел бы минимума*.

При составлении функции Лагранжа в какой-либо определенной системе координат полезно заметить, что

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{ds^2}{dt^2}. \tag{4,3}$$

Поэтому для составления функции Лагранжа достаточно найти квадрат длины элемента дуги в соответствующей системе координат.

В декартовых координатах, например, $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, поэтому

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2). \tag{4,4}$$

В цилиндрических $ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2$, откуда

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2). \tag{4,5}$$

В сферических $ds^2=dr^2+r^2d\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2$, и

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2+r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2). \tag{4,6}$$

§ 5. Функция Лагранжа системы материальных точек

Рассмотрим теперь систему материальных точек. Эту систему мы будем предполагать настолько удаленной от всех других тел, что взаимодействием между этими телами и системой можно пренебречь, т. е. не учитывать его при определении движения системы. Такие системы называются замкнутыми.

Функция Лагранжа обладает весьма важным свойством аддитивности. Именно, если L есть функция Лагранжа для некоторой механической системы, состоящей из двух частей A и B, каждая из которых, будучи замкнутой, имела бы в качестве функций Лагранжа соответственно функции L_A и L_B, то, удаляя эти две части друг от друга настолько далеко, чтобы взаимодействием между ними можно было пренебречь, мы получим

$$\lim L = L_A + L_B.$$

Как было выяснено в § 4, для свободно движущейся a-й материальной точки функция Лагранжа равна $\frac{m_a v_a^2}{2}$; поэтому для всей системы в случае когда взаимодействием можно пренебречь[1])

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}. \tag{5,1}$$

Для того чтобы учесть взаимодействие, оказывается достаточным к выражению $\sum \frac{m_a v_a^2}{2}$ прибавить функцию, зависящую только от взаимного положения частиц. Обозначим эту функцию через $-U$. Таким образом функция Лагранжа для всякой замкнутой механической системы имеет вид

$$L = \sum \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{5,2}$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ — радиусы-векторы частиц, принадлежащих системе. Величина

$$T = \sum \frac{m_a v_a^2}{2}$$

носит название *кинетической энергии* системы. Функцию же

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)$$

называют *потенциальной энергией* системы. Вид потенциальной функции определяется в каждом отдельном случае характером взаимодействия материальных точек. При удалении материальных точек друг от друга на бесконечно большие расстояния потенциальная энергия обращается в нуль. Если, как это нередко бывает, потенциальная

---

[1]) В качестве индекса, указывающего номер частицы, мы будем пользоваться первыми буквами латинского алфавита, а для индексов, указывающих номер координаты, буквами i, k, l.

энергия при увеличении расстояний между частицами не стремится к нулю, то это означает только то, что установленное нами для этого случая выражение для потенциальной энергии является неточным.

Напишем еще функцию Лагранжа в обобщенных координатах q_i. Так как при переходе от декартовой системы координат x_a, y_a, z_a к другой $q_1, q_2, \ldots, q_n$, покоящейся относительно первой, формулы преобразования координат

$x_a = f_a(q_1, q_2, \ldots, q_n)$; $y_a = \varphi_a(q_1, q_2, \ldots, q_n)$; $z_a = \psi_a(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

не зависят от времени явно, то

$$\dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k; \quad \dot{y}_a = \sum_k \frac{\partial \varphi_a}{\partial q_k}\dot{q}_k; \quad \dot{z}_a = \sum_k \frac{\partial \psi_a}{\partial q_k}\dot{q}_k.$$

Подставляя эти выражения в функцию Лагранжа

$$L = \sum \frac{m_a}{2}(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U,$$

получим

$$L = \sum_{i,k} \frac{a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}{2} - U(q), \tag{5,3}$$

где a_{ik} — функции только от координат.

До сих пор мы говорили исключительно о замкнутых системах. Рассмотрим теперь движение незамкнутой системы A, взаимодействующей с другой системой B, движение которой известно. В этом случае говорят о *движении во внешнем поле*. Ввиду того что, пользуясь принципом наименьшего действия, мы получаем уравнения для каждой координаты, считая остальные известными, мы можем пользоваться функцией Лагранжа всей системы, заменив в ней координаты системы B известными функциями времени.

Функция Лагранжа всей системы, которую мы будем считать замкнутой, равна

$$L = T - U = T(q_A, \dot{q}_A) + T(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B),$$

где q_A и q_B — координаты, относящиеся к системам A и B соответственно, а $U(q_A, q_B)$ — потенциальная энергия всей системы. Подставляя в эту функцию Лагранжа вместо q_B известные функции времени и отбрасывая члены, зависящие только от времени (несущественные для уравнений движения), получим

$$L = T(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Таким образом движение незамкнутой системы, находящейся в заданных внешних условиях, также описывается функцией Лагранжа обычного типа, с тем лишь отличием, что теперь потенциальная энергия может зависеть от времени явно.

Для случая движения одной частицы во внешнем поле общий вид функции Лагранжа, очевидно, есть

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\mathbf{r}, t). \tag{5,4}$$

Функция $U(\mathbf{r}, t)$ называется *потенциальной энергией во внешнем поле*.

В § 1 мы говорили об однородности времени, т. е. о том, что различные моменты времени эквивалентны друг другу по своим физическим свойствам. Вид лагранжевой функции (5,2) показывает, что время не только однородно, но и изотропно, т. е. свойства его одинаковы по обоим направлениям. В самом деле, замена t на $-t$ оставляет функцию Лагранжа, а следовательно, и уравнения движения неизменными. Другими словами, если в системе возможно некоторое движение, то всегда возможно и обратное движение, т. е. такое, при котором система проходит то же состояние в обратном порядке. В этом смысле все движения, происходящие по законам классической механики, обратимы.

§ 6. Уравнения движения

Зная лагранжеву функцию, мы можем теперь составить уравнения движения. Из $L = \sum \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_a)$ имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = m_a \mathbf{v}_a, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a},$$

откуда уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ примут вид

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{6,1}$$

Уравнения (6,1) представляют собой *уравнения движения* системы материальных точек в самом общем случае. Уравнения механики в форме (6,1) носят название уравнений Ньютона (второй закон Ньютона). Поскольку U не зависит от скоростей, мы видим, что ускорения материальных точек есть функции только координат.

Легко определить потенциальную энергию внешнего поля, в котором частица движется с постоянным ускорением $\mathbf{g}$. Из уравнения $m\mathbf{g} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ находим без труда

$$U = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}. \tag{6,2}$$

Задачи

1. Написать функцию Лагранжа для материальной точки в координатах u и v, связанных с декартовыми посредством соотношений:

а) $x = \frac{u-v}{2}$, $y = \sqrt{uv}$. *Отв.* $L = \frac{m}{8}\left[\left(1+\frac{v}{u}\right)\dot{u}^2 + \left(1+\frac{u}{v}\right)\dot{v}^2\right] - U(u, v)$;

б) $x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$, $y = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}$. *Отв.* $L = \frac{m}{2}\frac{\dot{u}^2+\dot{v}^2}{u^2+v^2} - U(u, v)$;

в) $x = u + v$, $y = uv$. *Отв.* $L = \frac{m}{2}\left[(1+v^2)\dot{u}^2 + (1+u^2)\dot{v}^2 + 2(1+uv)\dot{u}\dot{v}\right] - U(u, v)$;

г) $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=\frac{v}{u^2+v^2}$. *Отв.* $L=\frac{m}{2}\frac{\dot u^2+\dot v^2}{(u^2+v^2)^2}-U(u, v)$.

2. Преобразовать функцию Лагранжа для материальной точки к координатам.

Указание. Упростить функцию Лагранжа, прибавив полные производные по времени:

а) x' и y', связанным с декартовыми соотношениями: $x=x'+a\cos t$, $y=y'+a\sin t$. *Отв.* $L=\frac{m}{2}(\dot x'^2+\dot y'^2)+ma(x'\cos t+y'\sin t)-U$;

б) r' и φ', связанным с полярными соотношениями: $r=r'+at$, $\varphi=\varphi'$. *Отв.* $L=\frac{m}{2}[\dot r'^2+(r'+at)^2\dot\varphi'^2]-U$;

в) u и v, связанным с декартовыми соотношениями: $x=u\cos t$, $y=v\sin t$. *Отв.* $L=\frac{m}{2}[(\dot u^2+u^2)\cos^2 t+(\dot v^2+v^2)\sin^2 t]-U$;

г) ξ и η, связанным с декартовыми соотношениями: $x=\xi t$, $y=\eta t$. *Отв.* $L=\frac{mt^2}{2}(\dot\xi^2+\dot\eta^2)-U$;

д) к равномерно вращающейся системе координат.

Решение. Взяв цилиндрические координаты с осью z вдоль оси вращения, имеем для перехода от системы ρ, φ, z к равномерно вращающейся с угловой скоростью ω: $\rho=\rho'$, $z=z'$, $\varphi=\varphi'+\omega t$. Отсюда

$$L=\frac{m}{2}[\dot\rho'^2+\dot z'^2+\rho'^2(\dot\varphi'+\omega)^2]-U;$$

е) к равномерно ускоренной системе координат.

Решение. Если система x', y', z' двигается равномерно ускоренно, с ускорением a вдоль оси x относительно системы x, y, z, то $\dot x=\dot x'+at$ $\dot y=\dot y'$, $\dot z=\dot z'$. Отсюда

$$L=\frac{m}{2}(\dot x'^2+\dot y'^2+\dot z'^2)-max'-U.$$

3. Составить функцию Лагранжа для:

а) точки с массой m на шаровой поверхности в поле тяжести (сферический маятник).

Решение. Для описания движения берем сферические координаты, причем, поскольку радиус шара есть величина постоянная, то $\dot r=0$. Если полярная ось направлена к земле, то

$$L=\frac{mr^2}{2}(\dot\theta^2+\dot\varphi^2\sin^2\theta)+mgr\cos\theta;$$

б) точки на поверхности конуса с углом 2α при вершине, причем потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию от вершины.

Указание. Взять сферические координаты с центром в вершине конуса и полярной осью, по оси конуса. *Отв.* $L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2\sin^2\alpha)-\frac{a}{r}$;

в) двойного плоского маятника (рис. 3).

Решение. В качестве координат можно взять углы φ и θ, которые отрезки a и b образуют с вертикалью. Тогда для точки m_1 имеем $T_1=(m_1a^2\dot\varphi^2)/2$, $U=-m_1ga\cos\varphi$. Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выразим ее декартовы координаты x_2 и y_2 (начало координат в точке A, ось y направлена вниз по вертикали) через углы φ и θ. Мы получим тогда

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}[a^2\dot{\varphi}^2 + b^2\dot{\theta}^2 + 2ab\cos(\varphi - \theta)\,\dot{\varphi}\dot{\theta}],$$

$$U = -m_2 g(a\cos\varphi + b\cos\theta).$$

Окончательно

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 b^2}{2}\dot{\theta}^2 + m_2 ab\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\varphi - \theta) + (m_1 + m_2)\,ga\cos\varphi + m_2 gb\cos\theta;$$

г) точки m_1, движущейся по горизонтальной прямой, и точки m_2, движущейся в вертикальной плоскости; система находится в поле тяжести (рис. 4). Расстояние a между точками сохраняется неизменным.

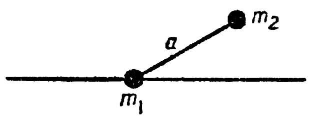
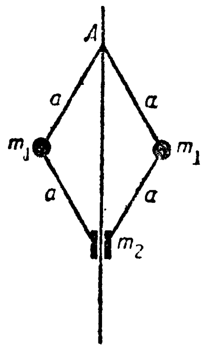


Рис. 4.



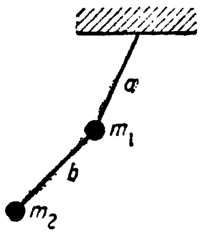


Рис. 3.

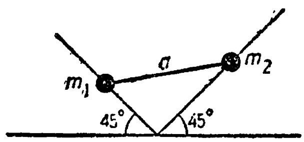


Рис. 5.

Рис. 6.

Решение. Введем угол φ между отрезком a и горизонталью и расстояние r по горизонтали от m_1 до некоторой неподвижной точки на ней, в которой поместим начало декартовых координат. Тогда координаты точки m_2 будут $x_2 = r + a\cos\varphi$, $y_2 = a\sin\varphi$. Окончательно

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_2}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 - 2a\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi) - m_2 ga\sin\varphi;$$

д) находящихся на постоянном расстоянии a друг от друга точек m_1 и m_2, движущихся по прямым, образующим угол в 45° с горизонталью; система находится в поле тяжести (рис. 5).

Указание. Введем угол φ между отрезком a и прямой, по которой движется точка m_1.

Отв. $L = \frac{m_1 a^2}{2}\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{m_2 a^2}{2}\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - \frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\cos\varphi + m_2\sin\varphi)$.

5. Составить функцию Лагранжа для:

а) системы, изображенной на рис. 6. Точка m_2 движется по вертикальной прямой, а вся система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали и находится в поле тяжести.

Решение. Введем угол φ между отрезком a и вертикальной осью и угол θ поворота всей системы вокруг оси вращения. Тогда $\dot{\theta} = \omega$. Для каждой из точек m_1 элемент перемещения равен $ds_1^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2\sin^2\varphi\, d\theta^2$ Для точки

m_2 расстояние до точки A равно $2a\cos\varphi$ и потому $ds_2 = -2a\sin\varphi\, d\varphi$. Окончательно

$$L = m_1(a^2\dot\varphi^2 + a^2\sin^2\varphi\omega^2) + 2m_2a^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2 + 2ga(m_1+m_2)\cos\varphi;$$

б) плоского маятника (в поле тяжести), точка подвеса которого движется по кругу радиуса r с постоянной угловой скоростью ω (рис. 7).

Решение. Введем угол φ между отрезком a и вертикалью. Тогда декартовы координаты точки:

$$x = r\cos\omega t + a\sin\varphi, \quad y = r\sin\omega t - a\cos\varphi;$$

после вычитания полной производной получим:

$$L = \frac{m}{2}[a^2\dot\varphi^2 + 2r\omega a\dot\varphi\sin(\varphi - \omega t)] + mga\cos\varphi;$$

в) маятника, по нити (с длиной a) которого движется точка m_2 с заданной скоростью v (рис. 8).

Решение. Введем угол φ между отрезком a и вертикалью и расстояние $r = r_0 + vt$ точки m_2 до точки подвеса маятника.

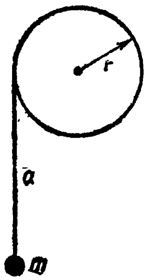


Рис. 7.

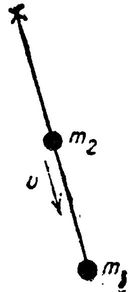


Рис. 8.

Опуская постоянные величины, получаем:

$$L = \frac{m_1}{2}[a^2\dot\varphi^2 + \frac{m_2}{2}\dot\varphi^2(r_0+vt)^2 + m_1ga\cos\varphi + m_2g(r_0+vt)\cos\varphi.$$

ГЛАВА II

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 7. Энергия

При движении механической системы $2n$ величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$, определяющих ее состояние, изменяются. Существуют, однако, такие функции этих величин, которые остаются постоянными при любых начальных условиях. Эти функции носят название *интегралов движения*.

Число независимых интегралов движения для любой замкнутой механической системы на единицу меньше удвоенного числа степеней свободы. Действительно, для замкнутой системы функция Лагранжа не зависит от времени явно, поэтому разделив первые $2n-1$ из $2n$ уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1}, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}; \quad \frac{dq_1}{dt} = \dot q_1, \ldots, \frac{dq_n}{dt} = \dot q_n,$$

на последнее, можно получить $2n-1$ уравнений, также не содержащих времени явно. Интегрируя эти уравнения, можно получить все интегралы движения.

Однако далеко не все интегралы движения имеют одинаковое значение. При рассмотрении тех изменений, которые происходят со свободно движущимися телами, после того как они некоторое время взаимодействовали друг с другом, оказывается, что независимо от природы имевшего место взаимодействия удовлетворяются некоторые *законы сохранения*, т. е. существуют величины, характеризующие состояния тел, которые отличаются тем свойством, что сумма этих величин по всем взаимодействующим телам не меняется в результате происходившего взаимодействия.

Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы. Если система замкнута или находится в постоянных внешних условиях, то потенциальная энергия U, а следовательно, и функция Лагранжа не зависят от времени явно. Поэтому $\frac{\partial L}{\partial t}=0$. Полная производная от функции Лагранжа по времени может быть теперь записана следующим образом:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i.$$

Заменяя выражения $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ при помощи уравнений Лагранжа на $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, получим

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)=\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=0.$$

Отсюда ясно, что если механическая система находится в постоянных внешних условиях, то величина

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=E \tag{7,1}$$

сохраняет постоянное значение. Она называется *энергией* системы. Формула (7,1) выражает собой *закон сохранения энергии* в обобщенных координатах. Механические системы, энергия которых сохраняется, т. е. системы замкнутые или находящиеся в постоянных внешних условиях, называются обычно *консервативными*.

В § 5 было указано, что в классической механике функция Лагранжа имеет вид

$$L=T(q,\dot{q})-U(q),$$

где T — квадратичная функция скоростей. Применяя к этой функции теорему Эйлера об однородных функциях, имеем

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T.$$

Подставляя это выражение в (7,1), получим

$$E=T+U \tag{7,2}$$

или в декартовых координатах

$$E=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}+U(\mathbf{r}_a). \tag{7,3}$$

Из последних формул видно, что энергия, как и функция Лагранжа, состоит из двух существенно различных членов. Кинетическая энергия T является квадратичной функцией скоростей, а потенциальная энергия U не зависит от скоростей вовсе и является функцией, описывающей взаимодействие материальных точек системы друг с другом и, если система не замкнута, взаимодействие между материальными точками системы и другими телами.

Аддитивность закона сохранения энергии следует из аддитивности функций Лагранжа.

Задачи

Найти энергию, если:

а) $L = \frac{\dot{x}^4}{2} - \frac{3x^4}{2}$. *Отв.* $E = \frac{3}{2}(\dot{x}^4 + x^4)$.

б) $L = \frac{1}{3}(x^2\dot{x}^4 + y^2\dot{y}^4) - x^2y^2$. *Отв.* $E = x^2\dot{x}^4 + y^2\dot{y}^4 + x^2y^2$.

в) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^3 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^3)$. *Отв.* $E = \dot{x}^3 + \dot{y}^3 + \frac{1}{2}\dot{x}\dot{y}$.

г) $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} - x$. *Отв.* $E = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + x$.

§ 8. Импульс

Рассмотрим опять замкнутую механическую систему. Ввиду однородности пространства ее функция Лагранжа не изменяется при параллельном переносе всех материальных точек системы на одинаковый бесконечно малый отрезок $\boldsymbol{\varepsilon}$, т. е. при преобразовании $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — произвольный бесконечно малый вектор.

Приращение функции Лагранжа при любом бесконечно малом преобразовании координат имеет вид

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \delta \mathbf{r}_\alpha + \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \delta \mathbf{v}_\alpha,$$

где сумма берется по всем материальным точкам системы. Так как в рассматриваемом случае $\delta \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\delta \mathbf{v}_i = 0$, то, вынося вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, одинаковый для всех материальных точек системы, за знак суммы, имеем $\boldsymbol{\varepsilon} \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0$. Это равенство имеет место при произвольных значениях вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$; поэтому оно эквивалентно утверждению, что

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0.$$

Заменяя выражения $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha}$ при помощи уравнений Лагранжа на $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha}$ и переставляя знаки диференцирования по времени и суммирования, получим

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = 0$$

и, интегрируя,

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = \mathrm{const}.$$

Таким образом в замкнутой механической системе векторная величина

$$\sum_{a} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{P} \tag{8,1}$$

сохраняет постоянное значение. Вектор $\mathbf{P}$ носит название *импульса системы*.

Так как $L = \sum_{a} \frac{m_a v_a^2}{2} - U$, то

$$\mathbf{P} = \sum_{a} m_a \mathbf{v}_a, \tag{8,2}$$

или в координатах

$$P_x = \sum m_a \dot{x}_a, \quad P_y = \sum m_a \dot{y}_a, \quad P_z = \sum m_a \dot{z}_a. \tag{8,3}$$

Для одной частицы импульс равен просто произведению массы на скорость

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}. \tag{8,4}$$

Из выражения (8,2) для импульса системы материальных точек видно, что импульс есть величина аддитивная. Более того, в отличие от энергии системы, выражение которой содержит в качестве дополнительного члена энергию взаимодействия между частицами — потенциальную энергию U, импульс системы просто равен сумме импульсов частиц, принадлежащих системе

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i. \tag{8,5}$$

Если система не замкнута, но характер взаимодействия ее с окружающими телами таков, что внешние условия не изменяются при перемещении системы в некотором направлении $\mathbf{l}$, то сохраняется проекция импульса системы на это направление:

$$p_l = \text{const}. \tag{8,6}$$

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно рассматривать как обобщение закона инерции. Действительно, для свободно движущейся частицы импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ сохраняется. В случае же системы материальных точек, как угодно взаимодействующих друг с другом, импульс каждой материальной точки не является постоянным, но сохраняется сумма импульсов всех частиц.

Согласно уравнениям Лагранжа импульс a-й частицы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \tag{8,7}$$

Производная импульса частицы по времени измеряет внешнее воздействие на эту частицу. Она носит название *силы*, действующей на эту частицу со стороны всех остальных частиц. Заметим, что силы

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \tag{8,8}$$

определяются исключительно взаимным расположением материальных точек и не зависят от их движения.

Складывая уравнения движения (8,7) и принимая во внимание, что вследствие закона сохранения импульса левая часть полученного равенства обращается в нуль, мы видим, что сумма всех сил в замкнутой системе равна нулю

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n=0. \tag{8,9}$$

В частности, в случае системы, состоящей из двух материальных точек

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=0. \tag{8,10}$$

Это означает, что сила, действующая на первую частицу со стороны второй, равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на вторую частицу со стороны первой. Это утверждение известно под названием *закона равенства действия и противодействия* (третий закон Ньютона).

Закон равенства действия и противодействия можно легко доказать и непосредственно. В самом деле, потенциальная энергия U, очевидно, зависит только от взаимного расстояния между точками:

$$U=U(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1).$$

Полагая $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{r}$, получаем

$$\mathbf{F}_1=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1}=\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_2=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},$$

откуда и следует, что

$$\mathbf{F}_1=-\mathbf{F}_2.$$

Если движение системы описывается обобщенными координатами q_i, то производные от функции Лагранжа по обобщенным скоростям

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{8,11}$$

носят название *обобщенных импульсов*, а производные по обобщенным координатам

$$F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{8,12}$$

называются *обобщенными силами*. Количество обобщенных импульсов и обобщенных сил равно, очевидно, числу степеней свободы системы.

Так как кинетическая энергия является квадратичной функцией скоростей, а потенциальная энергия не зависит от них вовсе, то во всякой инерциальной системе отсчета обобщенные импульсы p_i являются линейными однородными функциями обобщенных скоростей $\dot{q}_i$.

Согласно уравнениям Лагранжа производные по времени от обобщенных импульсов всегда равны обобщенным силам:

$$\dot{p}_i=F_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{8,13}$$

Задача

Частица с массой m, движущаяся со скоростью v, переходит из области пространства, в которой ее потенциальная энергия постоянна и равна U_1, в другую область, где эта энергия также постоянна и равна U_2. Границей обеих областей является плоскость. Определить показатель преломления такого перехода, т. е. отношение синуса угла падения частицы на граничную плоскость, к синусу угла преломления.

Решение. Выбираем систему координат x, y в плоскости движения частицы, причем одна из осей, например ось x, пусть лежит в плоскости, разделяющей обе области пространства. Так как потенциальная энергия не будет зависеть от x, то сохраняется проекция импульса на ось x. Если v' — скорость частицы после перехода во вторую область, то из сохранения импульса следует $v_x = v'_x$ или, если θ и θ' углы v и v' с нормалью к плоскости раздела (т. е. осью y): $v \sin\theta = v' \sin\theta'$. Воспользовавшись сохранением энергии, находим v', а затем и θ'. В результате получаем показатель преломления:

$$n = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv^2}(U_1 - U_2)}.$$

§ 9. Центр инерции

При помощи понятия импульса можно сформулировать понятия покоя и скорости системы как целого. Система материальных точек покоится в той системе отсчета, в которой импульс ее равен нулю. Под скоростью системы материальных точек относительно некоторой системы отсчета K понимают скорость той системы отсчета K_0, в которой система покоится.

Обозначим через $\mathbf{v}_a$ и $\mathbf{v}_{0a}$ скорости a-й материальной точки относительно систем отсчета K и K_0 соответственно и через $\mathbf{v}$ — скорость системы K_0 относительно K. Согласно преобразованиям Галилея

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{a0} + \mathbf{v}.$$

Умножая эти равенства на массы соответствующих материальных точек и складывая, получим $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{v}\sum m_a$.

Относительно системы отсчета K_0, система материальных точек покоится, поэтому $\mathbf{P}_0 = 0$ и

$$\mathbf{P} = \mathbf{v}\sum m_a. \tag{9,1}$$

Так как $\mathbf{P}$ есть импульс, а $\mathbf{v}$ — скорость системы как целого, то из последнего соотношения непосредственно следует аддитивность массы: масса сложного тела равна сумме масс составляющих его частей. Другими словами, существует *закон сохранения массы*.

Скорость системы можно теперь выразить через скорости принадлежащих ей материальных точек

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \mathbf{v}_a}{\sum m_a}. \tag{9,2}$$

Интегрируя это соотношение, правая часть которого, очевидно, представляет собой полную производную по времени, приходим к заключению, что скорость системы равна скорости точки пространства, положение которой описывается радиусом-вектором

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_a \mathbf{r}_a}{\sum m_a}. \tag{9,3}$$

Эта точка носит название *центра инерции системы*. Заметим, что координаты центра инерции являются средними координатами частиц системы, считая, что в каждой материальной точке сосредоточено столько частиц, сколько единиц в ее массе.

Из закона сохранения импульса следует, что центр инерции замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \mathbf{r}_0. \tag{9,4}$$

Для замкнутой системы движение обычно рассматривают в той системе отсчета, в которой центр инерции покоится, тем самым исключая из рассмотрения не представляющее интереса равномерное и прямолинейное движение системы как целого.

Энергию замкнутой системы можно написать в виде

$$E = \frac{MV^2}{2} + E_i, \tag{9,5}$$

где V — скорость движения системы как целого, M — общая масса и E_i — энергия системы в той системе отсчета, где она как целое покоится. E_i обычно называется *внутренней энергией системы*.

§ 10. Приведенная масса

Разложением движения системы на движение центра инерции и движение точек системы относительно центра инерции особенно упрощается рассмотрение движения системы, состоящей из двух материальных точек.

Пусть массы обеих точек m_1 и m_2, их радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Тогда функция Лагранжа будет

$$L = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \tag{10,1}$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \tag{10,2}$$

и поместим начало координат в центре инерции, что дает

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0. \tag{10,3}$$

Из двух последних равенств находим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{10,4}$$

Подставляя эти выражения в функцию Лагранжа L, находим после несложных преобразований

$$L = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(r)$$

или

$$L = \frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(r), \tag{10,5}$$

где величина
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{10,6}$$
называется *приведенной массой*.

Мы видим, что изучение движения системы двух материальных точек приводится к изучению движения одной точки с массой, равной приведенной массе, во внешнем поле, симметричном относительно начала координат.

Задача

Система состоит из одной частицы с массой M и n частиц с одинаковой массой m. Исключить движение центра инерции и свести задачу к задаче о движении n частиц.

Решение. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы с массой M, а $\mathbf{R}_a$ ($a = 1, 2, \ldots, n$) — радиус-векторы частиц с массой m. Введем расстояние от частицы с массой M до частиц с массой m: $\mathbf{R}_a - \mathbf{R} = \mathbf{r}_a$, и поместим начало координат в центре инерции:
$$M\mathbf{R} + m\sum_{a=1}^{n} \mathbf{R}_a = 0.$$
Из этих равенств находим
$$\mathbf{R} = -\frac{m\sum \mathbf{r}_a}{M+nm}, \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a - \frac{m\sum \mathbf{r}_a}{M+nm}.$$
Подставив эти выражения в $L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum \dot{\mathbf{R}}_a^2 - U$, получаем
$$L = \frac{m}{2}\sum \dot{r}_a^2 - \frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum \dot{\mathbf{r}}_a\right)^2 - U.$$

§ 11. Столкновение частиц

Рассмотрим столкновения двух частиц, т. е. предположим, что две свободно двигавшиеся частицы, пролетая на достаточно близком расстоянии друг от друга, отклоняются, вследствие взаимодействия, от своего первоначального пути. Через достаточно большой промежуток времени после столкновения движение каждой частицы можно снова считать прямолинейным и равномерным, но энергия и импульс каждой частицы уже не будут равны своим прежним значениям. Закон сохранения энергии и импульса указывает на то, что независимо от характера взаимодействия частиц при столкновении сумма энергий обеих частиц, как и сумма их импульсов, остается неизменной. Проще всего рассматривать столкновение в той системе отсчета, в которой центр инерции покоится. Пусть до столкновения материальные точки с массами m_1 и m_2 движутся в некоторой системе отсчета, которую мы будем называть покоящейся, со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Центр инерции имеет скорость
$$\mathbf{v}_{\text{ц. и}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$
Скорости точек m_1 и m_2 до столкновения в системе координат, в которой центр инерции покоится, будут получены, если из скоростей

этих точек в покоящейся (исходной) системе координат вычесть скорость центра инерции. Это дает

$$\mathbf{v}_{01} = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

$$\mathbf{v}_{02} = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Таким образом в системе координат, в которой центр инерции покоится, до столкновения абсолютные величины скоростей обратно пропорциональны массам, а направления скоростей взаимно противоположны: частицы летят навстречу друг другу. Этого и следовало ожидать, так как импульс системы равен нулю.

После столкновения скорости обеих точек, в силу сохранения импульса, в этой системе координат только поворачиваются, оставаясь взаимно противоположными по направлению. Ввиду сохранения энергии системы не изменяются также абсолютные величины каждой из скоростей.

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор в направлении скорости частицы с массой m_1 после столкновения. Тогда скорости обеих частиц в системе координат, в которой центр инерции покоится, будут после столкновения соответственно

$$\mathbf{v}'_{01} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,\mathbf{n},$$

$$\mathbf{v}'_{02} = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\,\mathbf{n}.$$

Чтобы возвратиться к покоящейся системе отсчета следует к полученным выражениям добавить скорость центра инерции. Таким образом для скоростей $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ после столкновения получаем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\cdot\mathbf{n} + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}'_2 &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\cdot\mathbf{n} + \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \tag{11,1}$$

Это и есть общее выражение для скоростей материальных точек после столкновения через скорости их до столкновения. Единичный вектор $\mathbf{n}$ не может быть определен из законов сохранения энергии и импульса и зависит от закона взаимодействия частиц и взаимного расположения их во время столкновения.

Полученные равенства легко интерпретировать геометрически. При этом удобнее от скоростей перейти к импульсам. Умножив первое равенство на m_1, второе на m_2 и положив $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v$, получим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v\cdot\mathbf{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), \\ \mathbf{p}'_2 &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v\cdot\mathbf{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2). \end{aligned}\right\} \tag{11,2}$$

При заданных значениях импульсов частиц до столкновения, импульсы после столкновения зависят лишь от направления единичного вектора $\mathbf{n}$.

Построим окружность с радиусом $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v$ (рис. 9). Проведем радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$, имеющий направление $\mathbf{n}$, и два вектора $\overrightarrow{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ и $\overrightarrow{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равны соответственно $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$, как это легко видеть из написанных выше равенств. Точки A, O и B неподвижны.

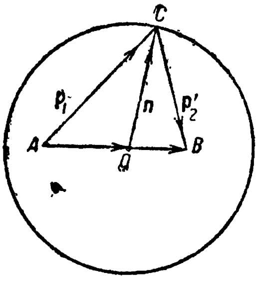


Рис. 9.

Вектор $\mathbf{n}$ может иметь любое направление в пространстве. Поэтому точка C, конец вектора $\overrightarrow{OC}$, пробегает все точки сферы, диаметральное сечение которой представляет рис. 9. Соответственно каждому положению точки C получаем сразу величину и направление импульсов частиц после рассеяния. Заметим, что $AO : BO = m_1 : m_2$.

Если одна из частиц, например, вторая, до столкновения покоилась, то легко видеть, что точка B лежит на окружности, а вектор $\overrightarrow{AB}$ определяет импульс первой частицы до рассеяния (см. рис. 10 и 11). Из рисунка легко выразить величину и направление скорости частиц

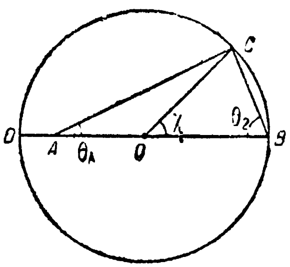


Рис. 10.

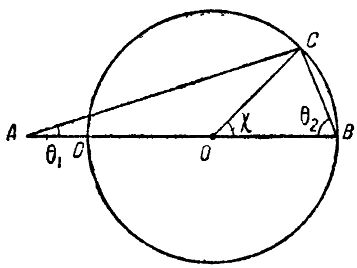


Рис. 11.

после столкновения через угол рассеяния χ в системе координат, связанной с центром инерции. Так, для углов рассеяния легко получаем

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \tag{11,3}$$

и для величин скоростей

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1 \sin\frac{\chi}{2}}{m_1 + m_2} v. \tag{11,4}$$

Случаю, когда обе частицы после столкновения движутся на одной прямой (лобовой удар), соответствует положение точки C на диаметре AOB. В этом случае очевидно

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \tag{11,5}$$

Легко видеть, что точка A лежит внутри окружности, если $m_1 < m_2$, (рис. 10) и вне окружности, если $m_1 > m_2$ (рис. 11). В последнем случае угол рассеяния не может быть больше некоторого максимального значения, которое получается, когда линия AC касается окружности. Для максимального угла рассеяния имеем очевидно

$$\sin\theta_1 = \frac{OB}{AO} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{11,6}$$

Особенно просто выглядит случай, когда $m_1 = m_2$. В этом случае точка A лежит на окружности (рис. 12), частицы рассеиваются под прямым углом друг к другу; углы $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}$ и скорости $v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}$, $v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}$.

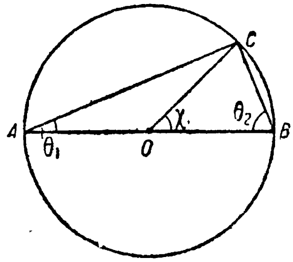


Рис. 12.

Во всех предыдущих рассуждениях мы считали, что внутренняя энергия обеих частиц не изменяется. Такие столкновения называются упругими столкновениями в отличие от неупругих, связанных с изменением внутренней энергии частиц. Наиболее простым случаем неупругого столкновения является случай, когда частицы после столкновения движутся вместе, как одна частица. Скорость этой сложной частицы, очевидно, легко определяется из закона сохранения импульса

$$\mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Для изменения внутренней энергии получаем, рассматривая систему отсчета, где центр инерции покоится:

$$E_i = E_i^{(1)} + E_i^{(2)} + \frac{\mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2}{2},$$

где μ — приведенная масса.

§ 12. Момент

С изотропией пространства также связан закон сохранения. Соответствующая аддитивная величина носит название *момента системы*.

Рассмотрим замкнутую механическую систему. Вследствие изотропии пространства функция Лагранжа ее не изменится, если всю систему как целое повернуть на некоторый угол вокруг произвольно выбранной оси. Для простоты вращение будем производить на бесконечно малый угол $\delta\varphi$. Направление вектора бесконечно малого поворота $\delta\varphi$ мы считаем совпадающим с осью вращения и притом так, чтобы вектор поворота и сам поворот образовывали правовинтовую систему.

Найдем прежде всего, чему равно при таком повороте приращение радиуса-вектора, проведенного из общего начала к какой-либо материальной точке, неизменно связанной с вращающейся системой координат. Положим, что радиус-вектор $\mathbf{r}$, не изменяя своей величины, повернулся на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ (рис. 13).

Линейное перемещение конца радиуса-вектора связано с углом поворота соотношением

$$\delta r = r \sin\theta\, \delta\varphi.$$

Так как вектор $\delta\mathbf{r}$ перпендикулярен к векторам $\delta\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{r}$ и все три вектора образуют правовинтовую систему, то в векторной форме это можно записать так:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}. \qquad (12,1)$$

При вращении системы меняется направление не только радиуса-вектора, но и всех векторов, причем все векторы преобразовываются по тому же закону, что и радиус-вектор. Поэтому приращение скорости относительно неподвижной системы координат есть

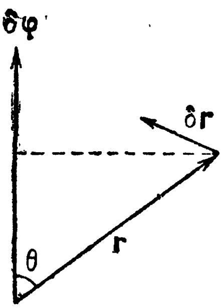


Рис. 13.

$$\delta\mathbf{v} = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}. \qquad (12,2)$$

Приравнивая нулю приращение функции Лагранжа замкнутой механической системы при бесконечно малом повороте системы, имеем

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a + \sum \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta\mathbf{v}_a = 0.$$

Подставим вместо $\delta\mathbf{r}_a$ и $\delta\mathbf{v}_a$ их выражения (12,1) и (12,2) и заменим выражения $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ и $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a}$ при помощи уравнений Лагранжа на $\dot{\mathbf{p}}_a$ и $\mathbf{p}_a$ соответственно. Тогда получим

$$\delta L = \sum \dot{\mathbf{p}}_a \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a + \sum \mathbf{p}_a \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a = 0,$$

или, вынося $\delta\boldsymbol{\varphi}$ за знак суммы:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \sum \{ \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a \} = 0.$$

Ввиду произвольности бесконечно малого вектора $\delta\boldsymbol{\varphi}$ последнее равенство эквивалентно равенству

$$\sum \{ \mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{p}_a \} = \frac{d}{dt} \sum \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = 0,$$

откуда следует, что

$$\sum \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \mathrm{const}.$$

Таким образом, если система замкнута, то векторная величина

$$\sum \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \mathbf{M} \qquad (12,3)$$

сохраняет постоянное значение. Вектор $\mathbf{M}$ носит название *момента системы*. Аддитивность момента очевидна.

Закон сохранения момента в случае двух материальных точек легко получить непосредственно из уравнений движения. Производной по времени от момента системы двух точек $\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$ будет

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2.$$

В правой части этого равенства первое и третье слагаемые равны нулю, так как скорость имеет то же направление, что и импульс. Полагая во втором и четвертом слагаемых $\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_1$ и $\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_2$, получим соотношение $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$. Согласно закону равенства действия и противодействия $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. Обозначая $\mathbf{F}_1$ через $\mathbf{F}$, получим

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times -\mathbf{F} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}.$$

Вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ направлен от одной из материальных точек к другой. Вектор силы $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ имеет то же направление. Поэтому векторное произведение этих двух векторов исчезает, откуда и следует $\dot{\mathbf{M}} = 0$, т. е. сохранение момента.

В отличие от энергии и импульса момент системы зависит от того, в какой точке пространства выбрано начало координат. Вместе с изменением радиусов-векторов $\mathbf{r}_a$ будет изменяться и вектор $\mathbf{M}$. Пусть $\mathbf{r}'_a$ — радиусы-векторы материальных точек в системе координат, начало которой находится на расстоянии $\mathbf{R}$ от начала рассмотренной выше системы координат. Тогда

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_a \tag{12,4}$$

и для момента получаем

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \sum \mathbf{R} \times \mathbf{p}_a + \sum \mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a.$$

Вторая сумма справа есть момент $\mathbf{M}'$ относительно новой системы координат. Первую сумму можно преобразовать, внося знак суммирования под знак векторного произведения и вводя импульс системы $\sum \mathbf{p}_a = \mathbf{P}$. Таким образом получаем

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{M}'. \tag{12,5}$$

Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится, т. е. когда $\mathbf{P} = 0$, момент ее не зависит от выбора начала координат.

Рассмотрим теперь материальную точку, движущуюся во внешнем поле с центральной симметрией, т. е. в таком поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой неподвижной точки. Поскольку эта материальная точка не составляет замкнутой системы, то момент ее относительно произвольной точки пространства не сохраняется. Легко, однако, видеть, что сохраняется момент относительно центра симметрии внешнего поля. В самом деле, относительно этого центра потенциальная энергия одинакова по всем направлениям и поэтому функция Лагранжа не изменяется при повороте вокруг центра симметрии, вследствие чего вполне применимо доказательство, приведенное в начале этого параграфа. Такое же сохранение момента относительно одной точки имеет, очевидно, место и для системы точек, находящихся во внешнем поле с центральной симметрией. Заметим, что абсолютная величина момента частицы равна произведению массы точки на ее скорость и на длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на вектор скорости:

$$M = m\rho v \tag{12,6}$$

или произведению массы частицы на длину радиуса-вектора и на составляющую скорости в направлении, перпендикулярном направлению радиус-вектора:

$$M = mrv_t. \tag{12,7}$$

Отметим еще одно простое соотношение. Если пользоваться цилиндрическими или сферическими координатами, то легко убедиться, что обобщенный импульс p_φ, соответствующий координате φ, равен составляющей момента по оси. Действительно, подставляя в выражение для величины M_z $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ и соответствующие выражения для $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получим

$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\rho^2\dot{\varphi}. \tag{12,8}$$

С другой стороны, в цилиндрических координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U \quad \text{и} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

В случае плоского движения радиус-вектор и импульс лежат в плоскости, в которой происходит движение, и вектор момента перпендикулярен этой плоскости. В этом случае, очевидно, просто

$$p_\varphi = M, \tag{12,9}$$

где p_φ — импульс, соответствующий полярному углу φ.

В случае плоского движения закон сохранения момента допускает простую геометрическую интерпретацию. На рис. 14 из начала координат к концам элемента пути $d\mathbf{r}$ проведены радиусы-векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$, образующие сектор OPQ. Площадь этого сектора, отнесенная к единице времени, называется секториальной скоростью движущейся точки.

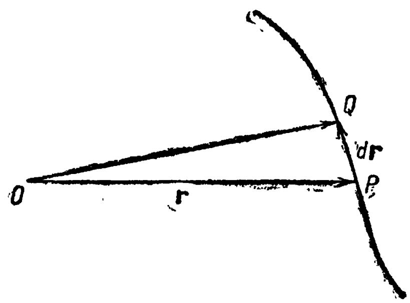


Рис. 14.

Площадь сектора OPQ равна половине площади параллелограма, построенной на векторах $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$:

$$dS = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|. \tag{12,10}$$

Разделив это выражение на элемент времени dt, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|. \tag{12,11}$$

Так как

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = 2m \cdot \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

то из (12,11) следует, что момент точки равен удвоенному произведению ее массы на ее секториальную скорость

$$M = 2m\dot{S}. \tag{12,12}$$

Если момент частицы сохраняется, то сохраняется и ее секториальная скорость. По этой причине вместо закона сохранения момента говорят также об интеграле площадей.

Результаты, полученные в §§ 7, 8, 12, показывают, что для всякой замкнутой механической системы имеют место законы сохранения одной скалярной величины и двух векторных — энергии, импульса и момента:

$$E=\sum\frac{m_a\mathbf{v}_a^2}{2}+U,\quad \mathbf{P}=\sum m_a\mathbf{v}_a,\quad \mathbf{M}=\sum\mathbf{r}_a\times\mathbf{p}_a. \qquad (12{,}13)$$

Эти семь законов сохранения являются единственными. Остальные интегралы движения не аддитивны.

Задачи

1. Найти выражения для компонент момента и квадрата момента в сферических координатах.

Отв. $M_x=-mr^2(\dot\vartheta\sin\varphi+\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi)$, $M_z=mr^2\sin^2\vartheta\dot\varphi$,

$M_y=mr^2(\dot\vartheta\cos\varphi-\dot\varphi\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi)$, $M^2=m^2r^4(\dot\vartheta^2+\sin^2\vartheta\dot\varphi^2)$.

2. Найти аддитивные законы сохранения для системы взаимодействующих точек при движении:

а) в поле бесконечной однородной плоскости.
Указание. Бесконечную плоскость принять за плоскость xy.
Отв. $E=\text{const}$, $P_x=\text{const}$, $P_y=\text{const}$; $M_z=\text{const}$.

б) в поле бесконечного однородного цилиндра.
Указание. Ось цилиндра — ось z. *Отв.* $E=\text{const}$, $P_z=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

в) в поле однородного шара. *Отв.* $E=\text{const}$, $\mathbf{M}=\text{const}$;

г) в поле бесконечной однородной полуплоскости.
Отв. Полуплоскость — часть плоскости xy, ограниченная осью y; $E=\text{const}$, $P_y=\text{const}$;

д) в поле двух точек.
Указание. Точки на оси z. *Отв.* $E=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

е) в однородном переменном поле.
Указание. Поле по оси z. *Отв.* $P_x=\text{const}$, $P_y=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

ж) в поле провода с переменным зарядом.
Указание. Ось провода совпадает с осью z. *Отв.* $P_z=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

з) в поле трехосного эллипсоида. *Отв.* $E=\text{const}$;

и) в поле бесконечной однородной призмы.
Указание. Ребра призмы параллельны оси z. *Отв.* $E=\text{const}$, $P_z=\text{const}$;

к) в поле однородного конуса.
Указание. Ось конуса — по оси z. *Отв.* $E=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

л) в поле кругового тора.
Указание. Ось тора — ось z. *Отв.* $E=\text{const}$, $M_z=\text{const}$;

м) в поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.
Указание. В поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии $\delta L=0$ только при повороте вокруг оси винта на угол $\delta\varphi$ и одновременном перемещении вдоль оси винта (оси z) на $\frac{h}{2\pi}$, где h — шаг винта (так как при $\delta\varphi=2\pi$ должно быть $\delta z=h$). Поэтому

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L}{\partial\varphi}\delta\varphi=\dot P_z\frac{h}{2\pi}\delta\varphi+\dot M_z\delta\varphi=0,$$

т. е.

$$M_z+\frac{h}{2\pi}P_z=\text{const};$$

н) для сферического маятника.
Указание. Ось z — вертикаль. *Отв.* $E = \text{const}$, $M_z = \text{const}$;

о) для точки в поле тяжести на конце равномерно укорачивающейся нити.
Указание. Ось z — вертикаль. *Отв.* $M_z = \text{const}$.

§ 13. Подобные траектории

Мы уже указывали раньше (§ 4), что к функции Лагранжа всякой механической системы можно прибавить полную производную от любой функции координат и времени. Это, однако, не самое общее преобразование, которое можно произвести над функцией Лагранжа. В самом деле, как легко видеть из уравнения $\delta \int L\,dt = 0$, выражающего принцип наименьшего действия, умножение функции Лагранжа на постоянную величину также не изменяет уравнений движения.

В связи с указанной только что неопределенностью функции Лагранжа находится то обстоятельство, что для некоторых механических систем функция Лагранжа допускает еще одно преобразование, не изменяющее уравнений движения, — умножение координат на постоянные множители. Это преобразование возможно в том случае, когда потенциальная энергия является однородной функцией декартовых координат, т. е. для любого λ удовлетворяет условию

$$U(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^s U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{13,1}$$

где число s есть степень однородности функции U.

Если изменить все линейные размеры такой системы в λ раз, т. е. положить для всех координат $x = \lambda x'$, то, для того чтобы функция Лагранжа $L = \sum \frac{m_a v_a^2}{2} - U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ изменилась при этом только на постоянный множитель и, следовательно, уравнения движения не изменились, нужно преобразовать и время, которое входит в скорости $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$. Положим $t = \mu t'$; тогда μ определяется из условия, что кинетическая энергия должна измениться во столько же раз, во сколько и потенциальная. Кинетическая энергия представляет собой квадратичную функцию скоростей и, поэтому, она изменится в λ^2/μ^2 раз. Потенциальная энергия, являясь однородной функцией s-й степени декартовых координат, изменится в λ^s раз.

Функция Лагранжа умножится на постоянный множитель, если $\frac{\lambda^2}{\mu^2} = \lambda^s$. Из этого равенства определяем μ: $\mu = \lambda^{1-s/2}$.

Таким образом мы приходим к заключению, что если механическая система, потенциальная энергия которой является однородной функцией s-й степени декартовых координат, может двигаться по закону

$$x = x(t), \tag{13,2}$$

то она может совершать также подобные движения:

$$x' = x(t'), \tag{13,3}$$

где

$$x = \lambda x' \quad \text{и} \quad t = \lambda^{1-s/2} t'. \tag{13,4}$$

Движения (13,2) и (13,3), связанные соотношениями (13,4), происходят по подобным траекториям, так как преобразование $x = \lambda x'$ изменяет только линейные размеры траекторий, не изменяя их формы.

Периоды движения по подобным траекториям изменяются также в $\lambda^{1-s/2}$ раз. Соответствующим образом изменяются и другие величины. Так, для скорости, энергии и момента, подставляя (13,4) в выражения для этих величин $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $E = \frac{mv^2}{2}$, $\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{v} = \lambda^{s/2}\mathbf{v}', \quad E = \lambda^s E', \quad \mathbf{M} = \lambda^{1+s/2}\mathbf{M}'.$$

Таким образом мы видим, что отношение значений любой механической величины в соответственных точках подобных траекторий и в соответственные моменты времени является степенью отношения линейных размеров этих траекторий, причем показатель степени зависит только от степени однородности потенциальной энергии.

Для иллюстрации только что изложенного рассмотрим несколько наиболее интересных случаев.

Как мы увидим далее, в случае малых колебаний потенциальная энергия является квадратичной функцией координат. Из соотношения $t = t'$, которое получается если в (13,4) подставить $s = 2$, следует, что периоды малых колебаний не зависят от амплитуды.

При движении в однородном силовом поле $s = 1$ (§ 15). В этом случае $t = \sqrt{\lambda}\, t'$. Отсюда следует, что, например, при падении тел в поле тяжести квадраты времен свободного падения тел в пустоте относятся как их начальные высоты.

При ньютоновском притяжении $\left(U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}\right)$ или кулоновском взаимодействии двух зарядов $\left(U = \frac{e_1 e_2}{r}\right)$, $s = -1$. В этих случаях $t = \lambda^{3/2} t'$ и мы можем утверждать, что квадраты времен обращения по орбитам пропорциональны кубам их размеров.

Задачи

1. Как относятся времена движения по одинаковым траекториям точек с различными массами при одинаковой потенциальной энергии?

Указание. Преобразовать время так, чтобы функция Лагранжа изменилась на постоянный множитель.

Отв. Времена относятся как корни из отношения масс.

2. Как изменяются времена движения по траекториям при изменении потенциальной энергии на постоянный множитель.

Отв. При изменении U в a раз, времена изменяются в $\frac{1}{\sqrt{a}}$ раз.

§ 14. Теорема вириала

В случае если движение системы, потенциальная энергия которой является однородной функцией декартовых координат, происходит в ограниченной области, существует весьма простое соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергий. Перейдем к выводу этого соотношения.

Вследствие однородности потенциальной энергии U по теореме Эйлера имеем

$$sU=\sum x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{14,1}$$

Так как кинетическая энергия T в декартовых координатах не зависит от координат, то (из уравнений Лагранжа) $\dot{p}_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}$ и поэтому

$$sU=-\sum x_i\dot{p}_i=-\frac{d}{dt}\sum x_ip_i+\sum p_i\dot{x}_i.$$

С другой стороны (см. 5, 2),

$$\sum p_i\dot{x}_i=2T.$$

Таким образом

$$sU=2T-\frac{d}{dt}\sum p_ix_i. \tag{14,2}$$

Средним по времени значением какой-либо функции времени $F(t)$ называется величина

$$\overline{F}=\lim_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T F(t)\,dt}{T}. \tag{14,3}$$

Черта над буквой означает среднее значение соответствующей величины. Усредняя соотношение (14,2) по времени, получим

$$s\overline{U}=2\overline{T}-\overline{\frac{d}{dt}\sum p_ix_i}. \tag{14,4}$$

Полученное соотношение представляет особый интерес в том случае, когда механическая система совершает квазистационарное движение, т. е. движение в некоторой конечной области и со скоростями, не обращающимися в бесконечность.

В этом случае координаты x_i и импульсы p_i не могут возрастать беспредельно; поэтому и сумма $\sum p_ix_i$ остается ограниченной. Легко видеть, что среднее значение производной по времени любой ограниченной величины равно нулю. Действительно, если $a(t)$ — такая величина, то

$$\overline{\frac{da}{dt}}=\lim_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T\frac{da}{dt}\,dt}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{\int\limits_0^T da}{T}=\lim_{T\to\infty}\frac{a(T)-a(0)}{T}=0.$$

Итак, второе слагаемое в правой части равенства (14,4) в случае финитных движений исчезает. Поэтому произведение степени однородности потенциальной энергии на среднее значение потенциальной энергии равно удвоенному значению средней кинетической энергии

$$s\overline{U}=2\overline{T}. \tag{14,5}$$

Это соотношение известно под названием *теоремы вириала* (величина $\sum x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$ иногда называется *вириалом* системы).

Заметив, что $\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$, мы можем выразить при помощи теоремы вириала $\overline{U}$ и $\overline{T}$ через E:

$$\overline{U}=\frac{2E}{s+2}; \quad \overline{T}=\frac{sE}{s+2}. \tag{14,6}$$

В частности, если потенциальная энергия является квадратичной функцией декартовых координат (малые колебания), т. е. $s=2$, средние значения кинетической и потенциальной энергий равны друг другу

$$\overline{T}=\overline{U}. \tag{14,7}$$

Если же $s=-1$ (кулоновское взаимодействие), то среднее значение потенциальной энергии отрицательно, а по абсолютной величине вдвое больше среднего значения энергии кинетической

$$2\overline{T}=-\overline{U}. \tag{14,8}$$

Из (14,6) видно, что в этом случае полная энергия отрицательна.

ГЛАВА III

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 15. Движение в однородном поле

В первой главе были рассмотрены основные уравнения классической механики. Интегрирование этих уравнений в общем виде невозможно и даже в конкретных случаях большей частью представляет большие математические трудности. В настоящей главе на ряде важных примеров мы укажем наиболее простые способы интегрирования уравнений механики. Некоторые другие случаи будут рассмотрены в четвертой и шестой главах.

Простейшим случаем несвободного движения материальной точки является движение в однородном внешнем поле $\mathbf{F}(t)$, т. е. в таком поле, в котором в определенный момент времени сила, действующая на точку, одинакова во всех точках пространства. Потенциальная энергия имеет в этом случае вид

$$U=-\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(t). \tag{15,1}$$

Интегрируя уравнение движения

$$m\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{F}(t), \tag{15,2}$$

находим

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\int_0^t \mathbf{F}(t)\,dt + \mathbf{v}_0.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m}\int_0^t dt \int_0^t \mathbf{F}(t)\,dt + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{15,3}$$

Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ и начальное значение радиус-вектора $\mathbf{r}_0$ являются произвольными постоянными интегрирования и определяются из начальных условий.

Важным частным случаем вышеизложенного является движение в постоянном однородном внешнем поле $\mathbf{F}$, не зависящем ни от координат, ни от времени. Вынося в формуле (15,3) постоянную силу $\mathbf{F}$ за знак интеграла, получим после элементарного интегрирования

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}}{2m}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \tag{15,4}$$

Поместим для простоты начало координат в той точке пространства, где материальная точка находится в начальный момент времени $t = 0$. Тогда $\mathbf{r}_0 = 0$ и

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}}{2m}t^2 + \mathbf{v}_0 t. \tag{15,5}$$

Из этой формулы видно, что в постоянном однородном внешнем поле движение является плоским, причем плоскость движения проходит через направления силы $\mathbf{F}$ и начальной скорости $\mathbf{v}_0$.

Выберем ось z так, чтобы ее направление совпадало с направлением силы $\mathbf{F}$, а плоскость, проходящую через направления $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}_0$, примем за плоскость xz. Тогда $F_x = F_y = 0$, $v_{0y} = 0$ и мы получаем

$$x = v_{0x}t,$$

$$z = \frac{F}{2m}t^2 + v_{0z}t.$$

Исключая из этих уравнений время t, находим уравнение траектории

$$z = \frac{F}{2mv_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x. \tag{15,6}$$

Траектория в этом случае представляет собой параболу, диаметр которой параллелен направлению силы.

Задачи

1. Найти траекторию частицы с массой m в переменном однородном поле $F = A\cos\omega t$, если при $t = 0$ скорость ее равна v_0 и направлена перпендикулярно к направлению поля.

Решение. Движение плоское. Взяв ось y в направлении поля и ось x в направлении первоначальной скорости, получим уравнения движения: $m\ddot{x} = 0$;

$m\ddot{y} = A\cos\omega t$. Учитывая начальные условия, находим $x = v_0 t$; $y = -\frac{A}{m\omega^2}\cos\omega t$. Отсюда уравнение траектории:

$$y = -\frac{A}{m\omega^2}\cos\left(\omega\frac{x}{v_0}\right).$$

2. Найти траекторию той же частицы, движущейся в однородном поле, которое равномерно вращается вокруг постоянной оси, перпендикулярной направлению поля. Величина поля неизменна и равна F. Начальная скорость частицы равна нулю.

Отв. Движение происходит в плоскости xy, перпендикулярной оси, вокруг которой вращается поле:

$$x = x_0 - \frac{F}{m\omega^2}\cos\omega t,$$

$$y = y_0 + \frac{F}{m\omega}t - \frac{F}{m\omega^2}\sin\omega t.$$

§ 16. Случай одной степени свободы

Наиболее общий вид функции Лагранжа механической системы с одной степенью свободы, находящейся в постоянных внешних условиях, есть

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q), \tag{16,1}$$

где $a(q)$ — какая-либо функция обобщенной координаты q.

В предыдущем параграфе мы начали с уравнений Лагранжа. В данном случае гораздо удобнее воспользоваться вместо этого непосредственно законом сохранения энергии. Этот метод имеет то преимущество, что приводит к диференциальному уравнению не второго, а первого порядка, которое к тому же легко интегрировать.

Из соотношения

$$\frac{a(q)\dot{q}^2}{2} + U(q) = E, \tag{16,2}$$

где буквой E обозначена постоянная величина, равная полной энергии системы, определяем скорость $\dot{q}$:

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{2}{a(q)}[E - U(q)]}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$t = \int\frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{a(q)}[E - U(q)]}} + C. \tag{16,3}$$

Величины E и C являются произвольными постоянными интегрирования.

При употреблении декартовых координат функция $a(q)$ есть просто масса движущейся точки. Поэтому функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x).$$

Из закона сохранения энергии $\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E$, как и прежде, находим

$$t=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}+C. \tag{16,4}$$

Так как при движении полная энергия всегда больше потенциальной, то движение может происходить только в тех областях пространства, в которых потенциальная энергия удовлетворяет условию $U(x)\leqslant E$.

Для наглядности построим график зависимости потенциальной энергии от координаты и проведем прямую линию, соответствующую значению полной энергии E (рис. 15). В области BC материальная точка вообще двигаться не может, а из области AB не может выйти.

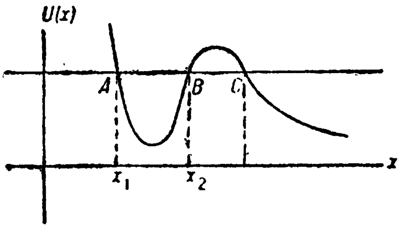


Рис. 15.

Точки пространства, в которых потенциальная энергия равна полной:

$$U(x)=E, \tag{16,5}$$

определяют границы движения. Если таких точек нет или есть только одна, то движение инфинитно — частица уходит в бесконечность. Если же точек пересечения несколько, например две (x_1 и x_2), и между ними полная энергия больше потенциальной, то движение частицы, попавшей в такую „потенциальную яму“ финитно, т. е. происходит в конечном участке.

Допустим, что потенциальная энергия $U(x)$ в бесконечности исчезает. В этом случае, если полная энергия отрицательна, т. е.

$$E<0, \tag{16,6}$$

то движение заведомо финитно. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что при $x\to\infty$ равенство $\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=E$ переходит в $\frac{m\dot{x}^2}{2}=E$. Так как левая часть этого равенства не может быть отрицательной, то при $E<0$ движение не может быть инфинитным, т. е. действительно происходит в ограниченной области.

Рассмотрим движение частицы в потенциальной яме AB (рис. 15). Координата x изменяется между двумя значениями x_1 и x_2, определяющими границы движения. При этом время движения от x_1 до x_2 равно времени обратного движения от x_2 до x_1. Поэтому период колебаний, т. е. время, за которое точка пройдет от x_1 до x_2 и обратно, равен удвоенному времени, за которое точка пройдет от x_1 до x_2. Обозначая период колебания через T, имеем из (16,4)

$$T=2\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}. \tag{16,7}$$

Границы движения x_1 и x_2 находят, решая уравнение (16,5).

Задачи

1. Найти место остановки системы, описываемой функцией Лагранжа при данных начальных условиях:

а) $L=\frac{\dot{x}^2}{2}-\operatorname{tg}x$, при $x=0$ $\dot{x}=\sqrt{2}$.

Указание. Место остановки определяется из условия $\dot{x}=0$.

Отв. $x=\frac{\pi}{4}$.

б) $L=\frac{\dot{x}^2-x^2+1}{x}$, при $x=1$ $\dot{x}=2$. *Отв.* $2\pm\sqrt{5}$.

в) $L=-\sqrt{1-\dot{x}^2}-x$, при $x=1$ $\dot{x}=0{,}6$. *Отв.* $x=1{,}25$.

2. Проинтегрировать уравнения движения точки, если дана функция Лагранжа и начальные условия (в момент $t=0$ координата и скорость равны x_0 и $\dot{x}_0$):

а) $L=\dot{x}^2-\frac{1}{x^2}$, $x_0=1$, $\dot{x}_0=0$. *Отв.* $x=\sqrt{t^2+1}$.

б) $L=\dot{x}^2+e^x$, $x_0=0$, $\dot{x}_0=2$. *Отв.* $t=\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{argsh}\sqrt{3}-\operatorname{argsh}e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{3})$.

в) $L=\frac{\dot{x}^2-1}{x^2}$, $x_0=1$, $\dot{x}_0=0$. *Отв.* $x=\operatorname{ch}t$.

г) $L=-\sqrt{1-\dot{x}^2}+x$, $x_0=2$, $\dot{x}_0=0$. *Отв.* $x=1+\sqrt{t^2+1}$.

3. Найти периоды колебаний в зависимости от энергии, если:

а) $L=\dot{x}^2-x^2$. *Отв.* $T=2\pi$.

б) $L=\frac{\dot{x}^2}{x}-x-\frac{1}{x}$. *Отв.* $T=2\pi$.

в) $L=\dot{x}^2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$. *Отв.* $T=\frac{2\pi}{|E|^{3/2}}$.

г) $L=\dot{x}^2-(e^x-1)^2$. *Отв.* $T=\frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}$.

д) $L=\frac{\dot{x}^2+2x-1}{x^2}$. *Отв.* $T=\frac{2\pi}{\sqrt{|E|}}$.

е) $L=\dot{x}^2-\operatorname{tg}^2x$. *Отв.* $T=\frac{2\pi}{\sqrt{1+E}}$.

ж) $L=\dot{x}^2-\operatorname{th}^2x$. *Отв.* $T=\frac{2\pi}{\sqrt{1-E}}$.

§ 17. Период как функция энергии

Рассмотрим механическую систему, совершающую колебания между двумя крайними положениями. Период колебания зависит от энергии системы и определяется по формуле, выведенной в предыдущем параграфе,

$$T(E)=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}. \tag{17,1}$$

В зависимости от вида функции $U(x)$ период оказывается той или иной функцией энергии. Мы рассмотрим здесь обратную задачу — определение вида функции $U(x)$, которая приводит к колебаниям с периодом, равным заданной функции энергии. Иными словами, функцию $T(E)$ мы будем считать заданной и будем искать такую зависимость потенциальной энергии от координаты, которой соответствует период $T(E)$.

Для удобства выберем начало координат в положении минимума потенциальной энергии и потенциальную энергию в минимуме положим равной нулю (рис. 16). Преобразуем интеграл (17,1), взяв в качестве независимой переменной не координату x, а потенциальную энергию U. При этом вместо dx под интегралом будет $\frac{dx}{dU}\,dU$. Функция $x(U)$ двузначна, так как каждому значению потенциальной энергии U соответствуют два значения координаты x. Соответственно этому интеграл (17,1) перейдет в сумму двух интегралов: от $x=x_1$ до $x=0$ и от $x=0$ до $x=x_2$. Пусть в области $x_1 \leqslant x \leqslant 0$

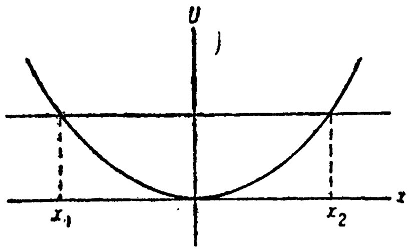


Рис. 16.

$$x = x_1(U) \quad \text{и} \quad dx = \frac{dx_1}{dU}\,dU,$$

а в области $0 \leqslant x \leqslant x_2$

$$x = x_2(U) \quad \text{и} \quad dx = \frac{dx_2}{dU}\,dU.$$

При замене пределов интегрирования следует иметь в виду, что когда $x=x_1$, или $x=x_2$, то $U=E$; когда же $x=0$, то $U=0$. Таким образом получаем

$$T(E) = 2\int_0^E \frac{\frac{dx_2}{dU}\,dU}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E-U]}} - 2\int_0^E \frac{\frac{dx_1}{dU}\,dU}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E-U]}}.$$

Разделим обе стороны этого равенства на $\sqrt{\alpha - E}$, где α — параметр, и проинтегрируем по E от 0 до α:

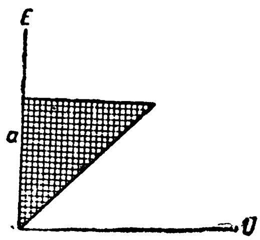


Рис. 17.

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha - E}} = 2\int_0^\alpha dE \int_0^E \frac{\frac{dx_2}{dU}\,dU}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(\alpha - E)\,(E-U)}} - 2\int_0^\alpha dE \int_0^E \frac{\frac{dx_1}{dU}\,dU}{\sqrt{\frac{2}{m}\,(\alpha - E)\,(E-U)}}.$$

Двукратные интегралы в правой части этого равенства легко взять, изменив предварительно порядок интегрирования, т. е. взяв сначала интеграл по E, затем по U. Новые пределы найдем, заметив, что интегрирование производится по области, представляющей собой половину квадрата с основанием, равным α. На рис. 17 эта область заштрихована. В результате получим

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^\alpha \frac{dx_2}{dU}\,dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}} - $$

$$-2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^\alpha \frac{dx_1}{dU}\,dU\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}}.$$

Интеграл по E вычисляется просто:

$$\int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{(\alpha-E)(E-U)}} = \int_U^\alpha \frac{dE}{\sqrt{\left(\frac{\alpha-U}{2}\right)^2-\left(E-\frac{\alpha+U}{2}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{E-\frac{\alpha+U}{2}}{\frac{\alpha-U}{2}}\Bigg|_U^\alpha = \pi.$$

Подставляя этот результат в предыдущее равенство, находим

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^\alpha \frac{dx_2}{dU}\,dU - 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^\alpha \frac{dx_1}{dU}\,dU =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left(x_2(U)\Big|_0^\alpha - x_1(U)\Big|_0^\alpha\right),$$

где $x_2(U)\Big|_0^\alpha = x_2(\alpha) - x_2(0) = x_2(\alpha)$; $x_1(U)\Big|_0^\alpha = x_1(\alpha) - x_1(0) = x_1(\alpha)$.

После упрощения находим

$$\int_0^\alpha \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\alpha-E}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2}}\,[x_2(\alpha) - x_1(\alpha)].$$

Полагая $\alpha = U$, имеем окончательно

$$x_2(U) - x_1(U) = \frac{1}{2\pi}\int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\frac{m}{2}[U-E]}}. \qquad (17,2)$$

Таким образом определяется разность $x_2(U) - x_1(U)$ как функция от U. Сами же функции $x_1(U)$ и $x_2(U)$ остаются неопределенными. Это значит, что существует не одна, а бесчисленное множество кривых $U = U(x)$, приводящих к заданной зависимости периода от энергии. Все эти кривые можно получить из одной, деформируя ее таким образом, чтобы разность двух значений x, соответствующих одному и тому же значению U, была неизменно равна соответствующему значению правой части равенства (17,2).

Многозначность решения исчезает, если потребовать, чтобы кривая $U=U(x)$ была симметричной относительно оси OU, т. е. чтобы

$$x_1(U)=-x_2(U).$$

В самом деле, положив $x_2=x$ и $x_1=-x$, получаем из (17,2) в этом случае

$$x(U)=\frac{1}{4\pi}\int_0^U \frac{T(E)\,dE}{\sqrt{\frac{m}{2}[U-E]}}, \tag{17,3}$$

т. е. уже определенную функцию $x(U)$. Формула (17,3) определяет потенциальную энергию U как неявную функцию от x.

§ 18. Циклические координаты

В ряде случаев может оказаться, что функция Лагранжа не зависит от некоторых из обобщенных координат q_k, а зависит только от их скоростей $\dot{q}_k$. Соответствующие этим координатам уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=0,$$

и допускают очевидные первые интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=p_k=\text{const}. \tag{18,1}$$

Это означает, что импульс, соответствующий той координате, которая не входит в функцию Лагранжа, так называемой *циклической координате*, остается постоянным во все время движения системы.

Воспользовавшись сохранением импульсов, соответствующих циклическим координатам, можно в ряде случаев проинтегрировать уравнения движения. Так, если система имеет одну степень свободы и единственная координата q является циклической, то функция Лагранжа имеет вид

$$L=\frac{a(t)\,\dot{q}^2}{2}. \tag{18,2}$$

Импульс p сохраняется; поэтому

$$p=a(t)\,\dot{q}=\text{const}.$$

Обозначая постоянное значение импульса через C, получим

$$a(t)\frac{dq}{dt}=C. \tag{18,3}$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$q=\int_{t_0}^{t}\frac{C}{a(t)}\,dt+q_0. \tag{18,4}$$

Другим случаем, когда удобно воспользоваться наличием циклических координат, является случай системы, находящейся в постоянных внешних условиях, когда в функцию Лагранжа ее входит явно только одна координата; другими словами, если все координаты за исключением одной — циклические. В этом случае можно легко определить координаты системы в функции от времени. В самом деле пусть q_2, $q_3, \dots, q_n$ — циклические координаты. Так как каждый из импульсов является линейной функцией скоростей, то при помощи $n-1$ равенств

$$p_2 = C_2, \quad p_3 = C_3, \ \dots, \ p_n = C_n \tag{18,5}$$

можно выразить $n-1$ скоростей, соответствующих циклическим координатам q_k, через скорость $\dot{q}_1$ — координату q_1 и постоянные величины $C_2, C_3, \dots, C_n$.

Подставляя эти скорости в закон сохранения энергии

$$T(a_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) + U(q_1) = E, \tag{18,6}$$

мы исключим все циклические координаты и получим

$$T(q_1, \dot{q}_1) + U(q_1) = E. \tag{18,7}$$

Дальше интегрирование производится так, как было указано в § 16. Определив координату q_1 в функции от времени, легко находим при помощи равенств (18,5) и все циклические координаты $q_2, q_3, \dots, q_n$.

Заметим, что наличие циклических координат зависит от того, насколько удачно выбраны координаты, описывающие движение системы.

Задачи

1. Проинтегрировать уравнения движения, если:

а) $L = \frac{1}{2} t^2 \dot{x}^2$, при $t = 1$ $x = 0$, $\dot{x} = 1$. *Отв.* $x = 1 - \frac{1}{t}$.

б) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + t^2 \dot{x}$ при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 1$. *Отв.* $x = t - \frac{t^3}{3}$.

в) $L = \sqrt{t^2 + \dot{x}^2}$, при $t = 3$ $x = 0$, $\dot{x} = 1$. *Отв.* $x = \frac{t^2}{6}$.

2. Проинтегрировать уравнения движения, если:

а) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} + x\dot{y}^2 + x$. *Отв.* $x = \frac{1}{2}\sqrt{p_y^2 + E^2}\,\mathrm{ch}\,(t - t_0) - \frac{E}{2}$;

$$y = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{p_y^2 + E^2}\,e^{t - t_0} - E}{p_y} = y_0.$$

б) $L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x}$. *Отв.* $x = \frac{4E}{p_y^2}\cos^2\frac{p_y(t - t_0)}{4}$;

$$y = \frac{E}{p_y}(t - t_0) + \frac{2E}{p_y^2}\sin\frac{p_y(t - t_0)}{2} + y_0.$$

в) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+2x\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2)$. *Отв.* $t=\frac{1}{2\sqrt{2E-p_y^2}}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$,

$$y=\frac{p_y}{2\sqrt{2E-p_y^2}}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)-\frac{x^2}{2}.$$

г) $L=\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{1+y^2}+\dot{y}^2\right)-\frac{1}{2}y^2$. *Отв.* $x=\frac{(2E+p_x^2+2)p_x}{2(p_x^2+1)}(t-t_0)-$

$$-\frac{2E-p_x^2}{4(p_x^2+1)^{3/2}}\sin 2\sqrt{p_x^2+1}\,(t-t_0)+x_0;\quad y=\sqrt{\frac{2E-p_x^2}{p_x^2+1}}\sin\sqrt{p_x^2+1}\,(t-t_0).$$

д) $L=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+2x\dot{y}}{2x}$. *Отв.* $x=\frac{2E}{(p_y-1)^2}\cos^2\frac{p_y-1}{2}(t-t_0)$,

$$y=\frac{E_0}{(p_y-1)^2}\left[(p_y-1)(t-t_0)+\sin(p_y-1)(t-t_0)\right]+y_0.$$

§ 19. Движение в поле с центральной симметрией

Важнейшим случаем, в котором исключают циклическую координату, является задача о двух телах. В § 10 было выяснено, что в системе координат, в которой центр инерции покоится, функция Лагранжа $L=\frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-U(r)$ описывает движение одной из материальных точек с приведенной массой μ относительно другой. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ направлен от второй точки к первой. Так как потенциальная энергия зависит только от абсолютной величины вектора $\mathbf{r}$, то движение первой точки происходит в поле с центральной или, как часто говорят, шаровой симметрией, причем в центре находится вторая точка. Отсюда следует, что кроме энергии сохраняется еще момент движущейся частицы

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}.$$

Помножив обе стороны последнего равенства скалярно на $\mathbf{r}$, получим

$$\mathbf{M}\mathbf{r}=(\mathbf{r}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}=(\mathbf{r}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}=0.$$

Таким образом радиус-вектор $\mathbf{r}$ частицы перпендикулярен направлению вектора $\mathbf{M}$, т. е. движение происходит в плоскости $\mathbf{M}\mathbf{r}=0$, перпендикулярной моменту.

Выбрав в этой плоскости полярные координаты с началом во второй точке, имеем

$$L=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r). \tag{19,1}$$

Координата φ является циклической, поэтому обобщенный импульс p_φ сохраняется. Как мы уже знаем $p_\varphi=M_z=M$; следовательно,

$$p_\varphi=\mu r^2\dot{\varphi}=M=\mathrm{const}. \tag{19,2}$$

Пользуясь законами сохранения энергии и момента, в силу которых величины E и M постоянны, можно найти r и φ как функции от времени, подобно тому, как это было указано выше, в общем виде.

Исключая циклическую координату φ из выражения для энергии

$$E=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r), \tag{19,3}$$

получаем

$$E=\frac{\mu\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2\mu r^2}+U(r). \tag{19,4}$$

Отсюда видно, что радиальное движение можно рассматривать как движение системы с одной степенью свободы, но с иной потенциальной энергией: $\frac{M^2}{2\mu r^2}+U(r)$. Величина $\frac{M^2}{2\mu r^2}$ носит название *центробежной энергии*.

Теперь из (19,4) находим

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{\mu}[E-U(r)]-\frac{M^2}{\mu^2r^2}};$$

откуда

$$dt=\frac{\mu\,dr}{\sqrt{2\mu[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{19,5}$$

Кроме того, из (19,2) имеем

$$d\varphi=\frac{M}{\mu r^2}dt. \tag{19,6}$$

Интегрируя сначала (19,5), получим

$$t=\int\frac{\mu\,dr}{\sqrt{2\mu[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}, \tag{19,7}$$

откуда можно определить r как функцию от времени.

Исключая из соотношений (19,5) и (19,6) время, получим уравнение для нахождения траектории

$$d\varphi=\frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{19,8}$$

Интегрируя его, находим

$$\varphi=\int\frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}. \tag{19,9}$$

Экстремальные расстояния r_0 между частицами можно определить из соотношения (19,4), учтя, что $(\dot{r})_0=0$. Решая уравнение

$$E=\frac{M^2}{2\mu r_0^2}+U(r_0) \tag{19,10}$$

относительно r_0, находят минимальные и максимальные расстояния между частицами.

Легко видеть, что траектория (19,9) симметрична относительно направлений экстремальных расстояний. Действительно, как видно из уравнения (19,10), квадратный корень в (19,9) обращается в нуль как раз для экстремальных значений r. С другой стороны, этот корень имеет два знака. Поэтому если мы выберем координаты так, чтобы при $r = r_0$ было $\varphi = 0$, то каждому значению r будут соответствовать два значения φ, отличающихся друг от друга только знаком. Точки траектории, имеющие координаты (r, φ) и $(r, -\varphi)$, расположены, очевидно, симметрично относительно прямой $\varphi = 0$.

Вид траектории (19,9) определяется характером взаимодействия, т. е. видом потенциальной энергии $U(r)$. Однако, несмотря на это, можно сделать несколько общих утверждений.

Прежде всего заметим, что если полная энергия E отрицательна

$$E < 0, \tag{19,11}$$

то движение финитно — частицы не могут удаляться на бесконечное расстояние друг от друга (предполагается, что при увеличении расстояния между частицами потенциальная энергия $U(r)$ стремится к нулю).

В некоторых случаях частицы могут упасть друг на друга. Такое движение называется *лимитационным*. Легко видеть, что лимитационное движение невозможно (кроме случая, когда $M = 0$), если потенциальная энергия при уменьшении r до нуля остается конечной, бесконечно возрастает или стремится к $-\infty$ медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$. В самом деле, так как всегда $\frac{\mu \dot{r}^2}{2} > 0$, то из (19,4) следует, что $E > \frac{M^2}{2\mu r^2} + U(r)$, откуда

$$Er^2 > \frac{M^2}{2\mu} + r^2 U(r).$$

В случае падения частиц друг на друга, т. е. при $r \to 0$, левая часть неравенства стремилась бы к нулю, а правая — стремилась бы к существенно положительной величине $\frac{M^2}{2\mu}$, так как по предположению

$$\lim_{r \to 0} r^2 U(r) = 0. \tag{19,12}$$

Таким образом при условии (19,12) лимитационное движение невозможно.

Если движение финитно и не является лимитационным, то существуют максимальное и минимальное расстояния между частицами. При движении абсолютная величина радиус-вектора колеблется между границами $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$, т. е.

$$r_{\min} \leqslant r \leqslant r_{\max}. \tag{19,13}$$

За период, т. е. за время, в течение которого r изменяется от r_{min} до r_{max} и затем опять до r_{min}, радиус-вектор $\mathbf{r}$ повернется на некоторый угол φ_0. Из формулы (19,9) получаем

$$\varphi_0 = 2\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu\left[E-U(r)\right]-\frac{M^2}{r^2}}}.$$

Если бы угол φ_0 был рациональной частью от 2π, т. е. мог быть представлен в виде $\varphi_0 = \frac{m}{n}2\pi$, где m и n — целые числа, то через n колебаний радиус-вектор, проведенный вначале к некоторой точке P, повернулся бы ровно m раз и снова совпал бы с точкой P. Траектория тогда была бы замкнутой кривой линией.

Однако обычно угол φ не является, конечно, рациональной частью 2π и кривая никогда не возвращается точно в заданную точку P. Рассмотрим какую-нибудь окружность, радиус r которой удовлетворяет неравенству (19,13). Траектория постоянно (дважды за период) пересекает эту окружность, причем, как мы только что видели, точки пересечения никогда не совпадают. Поэтому с течением времени точки пересечения траектории и рассматриваемой окружности заполнят всю окружность сколь угодно плотно. Так как то же самое относится к любой окружности, радиус которой удовлетворяет неравенству (19,13), то мы можем утверждать, что в случае финитного не лимитационного движения траектория, вообще говоря, заполняет кольцо, внутренний радиус которого равен r_{min}, а внешний r_{max}.

Существует два исключения из этого правила. Именно, если потенциальная энергия имеет вид $U = \frac{a}{r}$ или $U = ar^2$, то траектория кольца не заполняет и является замкнутой кривой линией. Первый из этих случаев мы рассмотрим в следующем параграфе, а второй — в § 31.

§ 20. Случай закона Кулона

В предыдущем параграфе мы рассматривали задачу о двух телах в общем виде. Большой интерес представляет собой тот случай, когда потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между частицами

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \tag{20,1}$$

т. е. так называемый кулоновский случай. Заметим, что $\alpha > 0$ соответствует притяжению, а $\alpha < 0$ — отталкиванию.

Для нахождения траектории воспользуемся формулой (19,9) предыдущего параграфа. Подставляя $U = -\frac{\alpha}{r}$, получим

$$\varphi = \int \frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}},$$

где попрежнему μ — приведенная масса системы, а E и M — ее энергия и момент.

Введя новую переменную $u=\frac{1}{r}$, получаем

$$\varphi=\int\frac{-M\,du}{\sqrt{2\mu E+2\mu\alpha u-M^2u^2}}=\int\frac{-M\,du}{\sqrt{2\mu E+\frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}-\left(Mu-\frac{\mu\alpha}{M}\right)^2}}.$$

Сделав подстановку $Mu-\frac{\mu\alpha}{M}=\sqrt{2\mu E+\frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}}\,y$, находим

$$\varphi=\int\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arccos y+\varphi_0,$$

откуда

$$y=\cos(\varphi-\varphi_0).$$

Возвращаясь к переменной r, напишем уравнение траектории в виде

$$\frac{1}{r}=\frac{1+\frac{M}{\mu\alpha}\sqrt{2\mu E+\frac{\mu^2\alpha^2}{M^2}}\cos(\varphi-\varphi_0)}{\frac{M^2}{\mu\alpha}}. \tag{20,2}$$

Если мы сравним это уравнение с уравнением конических сечений в полярных координатах с началом координат в фокусе

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}{p}, \tag{20,3}$$

то получим для параметра p и эксцентриситета e выражения

$$p=\frac{M^2}{\mu\alpha},\quad e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{20,4}$$

Таким образом в случае взаимодействия по закону Кулона в той системе отсчета, в которой центр инерции покоится, траектория каждой частицы представляет собой коническое сечение с фокусом в центре инерции.

Из выражения для e легко видеть, что коническое сечение при

$$E<0,\quad e<1 \text{ — эллипс,}$$
$$E=0,\quad e=1 \text{ — парабола,}$$
$$E>0,\quad e>1 \text{ — гипербола.}$$

Как и следовало ожидать, финитное движение (по эллиптической орбите) возможно только в том случае, когда полная энергия E отрицательна. В силу соотношения $E=\frac{\mu v^2}{2}-\frac{\alpha}{r}$ при этом должно быть $\alpha>0$, т. е. частицы должны притягиваться друг к другу.

Зная параметр и эксцентриситет, мы можем определить и полуоси эллиптической орбиты

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|},\quad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2\mu|E|}}. \tag{20,5}$$

Большая полуось зависит только от энергии.

Мы видим, что, как уже было сказано ранее, финитное движение в случае закона Кулона отличается тем существенным свойством, что траектория не заполняет кольца. Движение происходит по замкнутой орбите и является периодическим.

Найдем еще период обращения материальной точки по эллиптической орбите. Из уравнения (19,7) при условии $E<0$, для времени t получаем

$$t=\frac{-1}{2|E|}\sqrt{2\mu\alpha r-M^2-2\mu|E|r^2}-$$
$$-\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{\mu}{2|E|}\right)^{3/2}\arcsin\frac{1-\frac{2|E|}{\alpha}r}{\sqrt{1+\frac{2EM^2}{\mu\alpha^2}}}.$$

При полном обороте первый член остается неизменным, а arcsin изменяется на 2π; поэтому

$$T=\pi\alpha\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}. \qquad (20,6)$$

Задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее расстояния до начала координат точки с массой m, движущейся в поле с центральной симметрией, в зависимости от момента относительно центра и энергии. Потенциальная энергия при движении в поле:

а) $U=-\frac{\alpha}{r}$.

Решение. Для $U=-\frac{\alpha}{r}$ имеем: $E=\frac{M^2}{2mr_0^2}-\frac{\alpha}{r_0}$, откуда

$$r_0=\frac{-m\alpha\pm\sqrt{m^2\alpha^2+2mEM^2}}{2mE}.$$

Если $\alpha<0$ (при этом $E>0$, как сумма двух положительных слагаемых), существует только ближайшее расстояние (знак $+$ у корня), т. е. движение инфинитно. Если $\alpha>0$, при $E>0$ есть только наименьшее расстояние и, наконец, при $E<0$ существуют как наибольшее, так и наименьшее расстояния;

б) $U=\frac{\alpha}{r^2}$.

Решение. $r_0=\sqrt{\frac{2m\alpha+M^2}{2mE}}$. Если $\alpha>0$, то всегда есть только наименьшее расстояние. Если $\alpha<0$, то возможны два случая:

1) Когда $E>0$ и $M^2>-2m\alpha$, есть только наименьшее расстояние; когда же $M^2<-2m\alpha$, то нет ни наибольшего, ни наименьшего расстояния — точка падает из бесконечности в начало координат.

2) Когда $E<0$ (это возможно только, если $-2m\alpha>M^2$), имеется только наибольшее расстояние — точка падает с конечного расстояния в начало координат.

в) $U=\frac{1}{r^4}$.

Отв. $r_0=\sqrt{\frac{M^2+\sqrt{M^4+16m^2E}}{4mE}}=r_{\min}$. **Движение всегда инфинитно.**

г) $U=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\right)$.

Отв. $r_0=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+8mE(M^2+m)}}{4mE}$. При $E>0$ есть только наименьшее расстояние (знак $+$ у корня), т. е. движение инфинитно. При $-\frac{m}{8(M^2+m)}<E<0$ движение финитно (есть наибольшее и наименьшее расстояния).

д) $U=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$.

Отв. $r_0=\sqrt{E\pm\sqrt{E^2-\frac{M^2+m}{m}}}$. Движение всегда финитно.

2. Проинтегрировать уравнения движения для точки с массой 1, движущейся в поле с центральной симметрией:

а) $U=\frac{1}{2r^2}$.

Отв. $t=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-(M^2+1)}+t_0$,

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{M^2+1}}\cos\sqrt{\frac{M^2+1}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

б) $U=-\frac{1}{2r^2}$.

Отв. Если $E>0$ и $M>1$, то

$$t=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2-(M^2-1)}+t_0,$$

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{M^2-1}}\cos\sqrt{\frac{M^2-1}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

Если $E>0$ и $M<1$, то

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{1-M^2}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1-M^2}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

Если $E<0$ и $M<1$, то

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{2E}{M^2-1}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{1-M^2}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

В обоих последних случаях выражение для t такое же, как и в первом случае.

в) $U=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\right)$.

Отв. $t=\frac{1}{2E}\sqrt{2Er^2+r-(M^2+1)}-\frac{1}{(2E)^{3/2}}\operatorname{argch}\frac{4Er+1}{\sqrt{8E(M^2+1)+1}}$,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{2(M^2+1)}+\frac{\sqrt{8E(M^2+1)+1}}{2(M^2+1)}\cos\sqrt{\frac{M^2+1}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

Если $E<0$, то в выражении для t вместо argch стоит arccos.

г) $U=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)$.

Отв. $t=\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2-E}{\sqrt{E^2-(M^2+1)}}$,

$$\frac{1}{r^2}=\frac{E}{M^2+1}+\frac{\sqrt{M^2E^2-(M^2+1)}}{M^2+1}\cos 2\sqrt{\frac{M^2+1}{M^2}}(\varphi-\varphi_0).$$

§ 21. Рассеяние частиц

При столкновении частиц происходит *рассеяние*, т. е. отклонение частиц от своего первоначального пути. Для того чтобы охарактеризовать явление рассеяния, предположим, что на рассеивающую частицу падает не одна частица, а пучок движущихся с одной и той же скоростью частиц, причем плотность частиц постоянна во всех местах пучка.

Интенсивность рассеяния можно теперь охарактеризовать отношением количества частиц, рассеянных в телесном угле dO, к количеству частиц, упавших на единичную площадку, нормальную к скорости падающих частиц. Это отношение имеет размерность площади и потому называется *эффективным поперечником рассеяния*. Так как количество частиц, рассеянных в каком-либо телесном угле, прямо пропорционально общему количеству частиц, то эффективный поперечник очевидно не зависит от плотности пучка и определяется исключительно характером взаимодействия между рассеивающей частицей и частицами пучка.

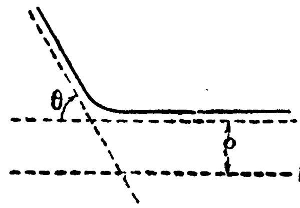


Рис. 18.

Рассмотрим систему, состоящую из рассеивающей и рассеиваемой частиц, причем допустим, что до столкновения рассеивающая частица покоилась. Если бы частица пучка не взаимодействовала с рассеивающей частицей, то она двигалась бы по прямой линии. То минимальное расстояние, на котором она прошла бы при этом от рассеивающей частицы, носит название прицельного расстояния; обозначим его через ρ (рис. 18). Угол между первоначальным направлением скорости частицы и направлением ее скорости после рассеяния (угол рассеяния) обозначим через θ.

Ясно, что чем больше прицельное расстояние, тем, вообще говоря, меньше угол рассеяния. Поэтому при заданной скорости v_∞ падающих частиц для каждого угла рассеяния θ существует свое прицельное расстояние

$$\rho = \rho(\theta), \tag{21,1}$$

такое, что рассеиваться на угол, равный θ, могут только те частицы, которые попадут на окружности радиуса ρ с центром в точке O, лежащей на линии, проходящей через начальное положение рассеивающей частицы параллельно начальной скорости v_∞.

Для того чтобы рассеяться между углами θ и $\theta + d\theta$, частицы должны упасть на кольцо, площадь которого равна $2\pi\rho|d\rho|$. Обычно $|d\rho| = -d\rho$ потому, что при $d\theta > 0$ обычно $d\rho < 0$, в силу увеличения угла рассеяния при уменьшении прицельного расстояния. Если ρ не однозначная функция θ, то надо помнить соответствующие выражения.

Если число частиц, упавших на единицу площади, обозначить через n, а число рассеянных между углами θ и $\theta + d\theta$ — через dN, то $dN = -n2\pi\rho\, d\rho$. Согласно определению эффективного поперечника $d\sigma = \frac{dN}{n}$, поэтому

$$d\sigma = -2\pi\rho(\theta)\, d\rho(\theta). \tag{21,2}$$

Чтобы найти зависимость эффективного поперечника от угла рассеяния, напишем (21,2) в виде

$$d\sigma = -2\pi\rho(\theta)\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}d\theta. \tag{21,3}$$

Введем элемент телесного угла dO, равный площади, которую вырезают на сфере с радиусом, равным единице, два конуса, углы раствора которых θ и $\theta + d\theta$. Тогда $dO = 2\pi \sin\theta\, d\theta$. Эффективный поперечник для рассеяния в телесном угле dO получим, выразив в (21,3) $d\theta$ через dO. Это дает

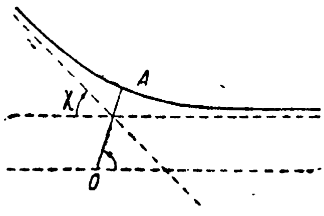


Рис. 19.

$$d\sigma = -\frac{\rho\frac{d\rho}{d\theta}}{\sin\theta}dO. \tag{21,4}$$

Остается найти лишь зависимость прицельного расстояния ρ от угла рассеяния θ. В общем случае ее легко найти, рассматривая рассеяние сначала в системе отсчета, в которой центр инерции покоится. Обозначим, как и в § 11, угол рассеяния в этой системе отсчета через χ (рис. 19).

Эффективный поперечник рассеяния между углами χ и $\chi + d\chi$ определяется так же, как и в исходной системе отсчета:

$$d\sigma = -2\pi\rho(\chi)\,d\rho(\chi) \tag{21,5}$$

или

$$d\sigma = -2\pi\rho(\chi)\frac{d\rho}{d\chi}d\chi. \tag{21,6}$$

Как было сказано в § 19, траектория рассеиваемой частицы имеет симметричный характер, причем осью симметрии является прямая, проходящая через начало координат O и точку A траектории, наиболее близкую к точке O.

Таким образом мы можем утверждать, что кратчайшее расстояние OA лежит по биссектрисе угла между асимптотами траектории, по которой движется частица. Если обозначить через φ_0 угол между направлением кратчайшего расстояния и какой-либо из асимптот, то

$$\chi = \pi - 2\varphi_0. \tag{21,7}$$

Чтобы найти угол рассеяния χ, достаточно поэтому определить угол φ_0. По формуле (19,9) находим

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\mu[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \tag{21,8}$$

где E и M — энергия и момент системы, а μ — ее приведенная масса. Кратчайшее расстояние r_0 находится решением уравнения (19,4). Энергию и момент можно при этом выразить через начальную скорость рассеиваемой частицы и ее прицельное расстояние

$$E=\frac{\mu v_\infty^2}{2}, \quad M=\mu v_\infty \rho. \tag{21,9}$$

Таким образом получаем

$$\varphi_0=\int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{\mu v_\infty^2}}}. \tag{21,10}$$

Формулы (21,10), (21,7) и (21,6) дают в общем случае угол рассеяния и эффективный поперечник рассеяния в системе отсчета, в которой центр инерции покоится. Для нахождения соответствующих величин в более удобной системе отсчета, в которой до рассеяния рассеивающая частица покоилась, следует вместо угла χ ввести θ — угол рассеяния в этой системе отсчета. В § 11 мы этот угол обозначали через θ_1. Связь между углами θ_1 и χ ясна из соотношений (11,3), полученных нами в том же параграфе.

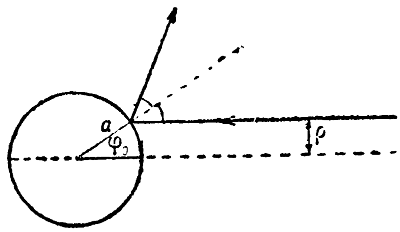


Рис. 20.

Рассмотрим в виде примера рассеяние частиц, взаимодействующих друг с другом по закону

$$\left.\begin{aligned} U&=\infty \quad \text{при} \quad r<a, \\ U&=0 \quad \text{при} \quad r>a. \end{aligned}\right\} \tag{21,11}$$

Так как частица, очевидно, в сферу радиуса a проникнуть не может, а, находясь вне сферы, движется свободно, то в случае такого бесконечно высокого потенциального барьера можно говорить о рассеянии частиц от бесконечно твердого шарика радиуса a. Соответственно тому, что было сказано в § 19 о симметрии траектории, угол падения частицы на шарик равен углу отражения от него. Как видно из рис. 20, прицельное расстояние ρ выражается через угол φ_0 соотношением $\rho=a\sin\varphi_0$. Подставив сюда [см. (21,7)] $\varphi_0=\frac{\pi-\chi}{2}$, получаем

$$\rho=a\cos\frac{\chi}{2}.$$

Составляя выражение для эффективного поперечника, имеем

$$d\sigma=-2\pi\rho\frac{d\rho}{d\chi}d\chi=\pi a^2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\,d\chi,$$

или

$$d\sigma=\frac{\pi a^2}{2}\sin\chi\, d\chi.$$

Введя телесный угол $dO = 2\pi \sin\chi\, d\chi$, получаем

$$d\sigma = \frac{a^2}{4}\, dO. \tag{21,12}$$

§ 22. Формула Резерфорда

Проведем вычисление эффективного поперечника рассеяния до конца для случая, когда взаимодействие между частицами пучка и частицами рассеивающего вещества можно считать кулоновским.

Полагая в формуле (21,10) $U = -\frac{\alpha}{r}$, получим

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{\rho\, dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{2\alpha}{\mu v_\infty^2}\frac{1}{r}}},$$

откуда, интегрируя,

$$\varphi_0 = \arccos \left. \frac{\frac{\rho}{r} - \frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 \rho^2}}} \right|_{r_0}^{\infty}.$$

Легко видеть, что при нижнем пределе, когда $r = r_0$, arccos равен нулю. Действительно, когда r принимает наименьшее значение r_0, числитель, а следовательно и вся дробь под знаком arccos'инуса, принимает наибольшее значение. Однако наибольшее значение косинуса есть единица и $\arccos 1 = 0$. То же самое можно доказать и непосредственным вычислением.

Остается теперь взять значение проинтегрированного выражения при верхнем пределе $r = \infty$. Это дает

$$\varphi_0 = \arccos \frac{-\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4 \rho^2}}}. \tag{22,1}$$

Теперь выразим через φ_0 квадрат прицельного расстояния:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0.$$

Подставляя $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$, получим

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{\mu^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}.$$

Диференцирование по χ дает

$$2\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = -\left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi.$$

Поэтому эффективный поперечник [см. (21,6)] есть

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}}{\sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi. \qquad (22,2)$$

Вводя $dO = 2\pi \sin\chi\, d\chi$, получим эффективный поперечник для рассеяния в телесный угол dO:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{dO}{\sin^4\frac{\chi}{2}} \qquad (22,3)$$

Эта формула называется *формулой Резерфорда*. Из нее видно, что интенсивность рассеяния быстро падает с увеличением угла χ от 0 до π. При $\chi = 0$ выражение для $d\sigma$ обращается в бесконечность, что соответствует пролетанию частиц на очень больших расстояниях друг от друга.

Формула (22,3) дает эффективный поперечник в системе отсчета, где покоится центр инерции обеих сталкивающихся частиц. В случае когда масса рассеивающей частицы очень велика по сравнению с массой рассеиваемой, эта система отсчета совпадает с системой, в которой покоится рассеивающая частица, и формула (22,3) приобретает вид

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{dO}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \qquad (22,4)$$

где E — энергия падающей частицы.

Если рассеивающая частица до столкновения покоится и массу ее нельзя считать бесконечной, то в формулу (22,3) должно быть подставлено выражение χ через θ согласно формуле (11,7). Это преобразование, вообще говоря, приводит к довольно громоздким формулам.

Если массы обеих сталкивающихся частиц равны ($m_1 = m_2 = m$), формулы упрощаются. В этом случае $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$. Как было доказано в § 11, угол отклонения θ_1 рассеиваемой частицы связан с углом χ в случае равных масс соотношением $\theta_1 = \chi/2$. Поэтому

$$dO = 2\pi \sin\chi\, d\chi = 8\pi \sin\theta_1 \cos\theta_1\, d\theta_1.$$

Эффективный поперечник рассеяния для падающих частиц есть

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1. \qquad (22,5)$$

Кроме этих первичных частиц между углами θ_1 и $\theta_1 + d\theta_1$ рассеется также некоторое число частиц, которые раньше покоились, причем, так как $\theta_1 = \pi/2 - \theta_2$, мы получим

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2. \tag{22,6}$$

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то мы можем обе частицы после столкновения считать за рассеянные и общий эффективный поперечник рассеяния между углами θ и $\theta + d\theta$ для всех частиц получим, складывая $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ и заменив как θ_1, так и θ_2 на θ,

$$d\sigma = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \left(\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\right) d\theta. \tag{22,7}$$

Вводя элемент телесного угла $dO = 2\pi \sin\theta\, d\theta$, получим эффективный поперечник для рассеяния в телесном угле dO:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta\, dO. \tag{22,8}$$

Задачи

1. Найти угол отклонения в зависимости от начальной скорости и прицельного расстояния для точки с массой 1, которая движется в поле с центральной симметрией:

а) $U = \frac{1}{2r^2}$. *Отв.* $\theta = \pi\left(1 - \frac{\rho v_\infty}{\sqrt{1+\rho^2 v_\infty^2}}\right)$.

б) $U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\right)$.

Отв. $\theta = \pi\left(1 - \frac{2\rho v_\infty}{\sqrt{1+\rho^2 v_\infty^2}}\right) + \frac{2\rho v_\infty}{\sqrt{1+\rho^2 v_\infty^2}} \operatorname{arctg} 2v_\infty \sqrt{1+\rho^2 v_\infty^2}$.

2. Определить эффективный поперечник рассеяния для движения частицы с массой 1 в поле с центральной симметрией $U = \frac{1}{2r^2}$.

Отв. Воспользовавшись результатом задачи 1, определяем зависимость ρ^2 от θ:

$$d\sigma = \frac{\pi^2}{v_\infty^2} \frac{\pi - \theta}{\theta^2 (2\pi - \theta)^2} \frac{dO}{\sin\theta},$$

3. Определить эффективный поперечник рассеяния для столкновения двух точек с одинаковыми массами $m = 1$, из которых одна первоначально покоилась, если они взаимодействуют по закону:

а) формулы (21,11).

Решение. Для движущихся частиц [см. (21,12)] $d\sigma_1 = \frac{a^2}{4} 2\pi \sin\chi\, d\chi$. Заменяя χ на 2ϑ [см. формулу (11,15)], получаем $d\sigma_1 = \pi a^2 \sin^2\vartheta\, d\vartheta$. Вводя телесный угол $dO_1 = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$, найдем

$$d\sigma_1 = a^2 \cos\vartheta\, dO_1.$$

Для частиц, которые первоначально покоились, угол отклонения будет $\theta = \frac{\pi - \chi}{2}$

и, следовательно, для них $d\sigma_2 = \pi a^2 \sin^2\theta\, d\theta$. Введя телесный угол $dO_2 = 2\pi \sin\theta\, d\theta$, найдем

$$d\sigma_2 = a^2 \cos\theta\, dO_2;$$

б) $U = \frac{1}{2r^2}$. *Отв.* Для движущихся частиц

$$d\sigma_1 = \frac{\pi^2}{4v_\infty^2} \cdot \frac{\pi - 2\vartheta}{\vartheta^2(\pi - \vartheta)^2};$$

для частиц первоначально покоящихся

$$d\sigma_2 = \frac{8\pi^2}{mv_\infty^2} \frac{\theta}{(\pi^2 - 4\theta^2)^2} \frac{dO_2}{\sin\theta}.$$

4. Как зависит эффективный поперечник рассеяния от скорости частиц, если потенциальная энергия пропорциональна r^{-n}.

Решение. Согласно сказанному в § 13 [см. формулу (13,4)], если потенциальная энергия является однородной функцией (n-го порядка) координат, то при изменении линейных размеров в a раз скорости меняются в $a^{-n/2}$ раз. Обратно, при изменении скорости в b раз размеры, в частности ρ, изменяются в $b^{-2/n}$ раз. Поэтому ρ должно быть пропорционально $v^{-2/n}$, т. е. $\rho = v^{-2/n} f(\theta)$ (угол отклонения θ для подобных траекторий одинаков). Поэтому эффективный поперечник $d\sigma = -2\pi\rho\, d\rho$ пропорционален $v^{-4/n}$.

§ 23. Рассеяние под малыми углами

Рассмотрение явления рассеяния частиц весьма упрощается при малых углах рассеяния.

Пусть частица с массой m_1, движущаяся со скоростью v, сталкивается с покоящейся частицей, масса которой m_2, и рассеивается на малый угол. В этом случае незачем переходить к системе отсчета, в которой покоится центр инерции, так как угол отклонения можно легко найти сразу в интересующей нас системе отсчета, в которой частица с массой m_2 до столкновения покоилась.

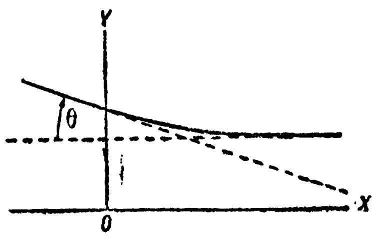


Рис. 21.

Выберем ось x-ов по направлению первоначального импульса частицы (рис. 21). Тогда составляющая импульса частицы, перпендикулярная оси, сначала равна нулю. Обозначим значения этой составляющей после столкновения через p'_y и абсолютной величины импульса через p'. Ясно, что

$$\sin\theta = \frac{p'_y}{p'}. \qquad (23,1)$$

Поскольку мы рассматриваем случай малых отклонений, мы вместо $\sin\theta$ можем писать просто θ, а в знаменателе можем в первом приближении заменить p' на p, где p — импульс движущейся частицы до столкновения. Тогда мы получим

$$\theta = \frac{p'_y}{p}. \qquad (23,2)$$

Таким образом в случае малого угла отклонения θ его можно считать равным отношению приращения импульса в направлении, перпендикулярном первоначальному направлению движения, к первоначальному импульсу.

Найдем теперь p'_y. Так как $\frac{dp_y}{dt}=F_y$, то полное приращение импульса есть

$$p'_y=\int_{-\infty}^{\infty}F_y\,dt. \qquad (23,3)$$

Будем считать, что рассеиваемая частица движется в поле с центральной симметрией. Потенциальная энергия будет поэтому функцией от $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Для перпендикулярной начальному направлению скорости составляющей силы, находим

$$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}=-U'\frac{y}{r}.$$

Поскольку угол отклонения мы считаем малым, будем считать при вычислении интеграла (23,3), что рассеиваемая частица вовсе не отклоняется от своего пути, т. е. движется прямолинейно и равномерно. Тогда, как это видно из рис. 21, $y=\rho$. Для F_y и dt получаем теперь: $F_y=-U'\frac{\rho}{r}$ и $dt=\frac{dx}{v}$. Подставляя эти выражения в интеграл (23,3) и принимая во внимание, что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ координата x также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$p'_y=\int_{-\infty}^{\infty}F_y\,dt=-\int_{-\infty}^{\infty}U'\frac{\rho}{r}\frac{dx}{v}.$$

Для угла отклонения получаем, таким образом,

$$\theta=\frac{p'_y}{p}=-\int_{-\infty}^{\infty}U'\frac{\rho}{mv^2}\frac{dx}{r}. \qquad (23,4)$$

От интегрирования по x перейдем к интегрированию по r. Из соотношения $r^2=x^2+\rho^2$, находим $dx=\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ r изменяется от ∞ до ρ и затем снова от ρ до ∞. Поэтому интеграл (23,4) перейдет в сумму двух интегралов по r: от ∞ до ρ и от ρ до ∞. Оба эти интеграла, очевидно, равны друг другу и мы должны взять просто удвоенное значение интеграла от ρ до ∞. Таким образом получаем

$$\theta=-\frac{2\rho}{mv^2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{U'(r)\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}. \qquad (23,5)$$

Из этого соотношения находим угол отклонения θ и зависимость прицельного расстояния ρ от θ. Эффективный поперечник рассеяния определяется затем, как обычно, по формуле (21,4) ($\sin\theta$ можно заменить на θ).

Задача

Определить эффективный поперечник рассеяния для частиц, движущихся в поле с центральной симметрией для малых углов рассеяния, в случае $(m=1): U=\frac{1}{r^3}$. *Отв.* $d\sigma=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{v\theta^2}\right)^{2/3} dO$.

ГЛАВА IV

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 24. Лагранжева функция малого колебания

Весьма большое значение имеет изучение движений, которые совершает механическая система вблизи положения устойчивого равновесия. Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда они происходят в замкнутой системе с одной степенью свободы.

Для того чтобы найти положения равновесия, заметим, что в этих положениях сила $F=-\frac{dU}{dq}$ должна быть равна нулю. Поэтому условие равновесия мы можем написать в виде

$$\frac{dU}{dq}=0. \tag{24,1}$$

Легко видеть, что устойчивому равновесию соответствует только тот случай, когда потенциальная энергия имеет минимум. Если же точка покоится в положении максимума потенциальной энергии, то даже небольшое отклонение от положения равновесия приведет к дальнейшему значительному удалению от него.

Таким образом, при устойчивом равновесии

$$\frac{dU}{dq}=0, \quad \frac{d^2U}{dq^2}>0. \tag{24,2}$$

Отклонения от положения устойчивого равновесия $q=q_0$ обозначим через x, т. е.

$$q=q_0+x, \tag{24,3}$$

где x мы будем считать малым. Это выражение мы подставим в функцию Лагранжа

$$L=\frac{a(q)\dot{q}^2}{2}-U(q). \tag{24,4}$$

В первом члене $\dot{q}=\dot{x}$, а $a(q)$ можно приближенно заменить на $a(q_0)$. Вводя для краткости обозначение

$$a(q_0)=m, \tag{24,5}$$

получим приближенное выражение кинетической энергии

$$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}. \tag{24,6}$$

Аналогично, разлагая потенциальную энергию $U(q)$ в ряд Тейлора, имеем

$$U(q)=U(q_0+x)=U(q_0)+x\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q_0}+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q_0}+\ldots$$

Но $\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q_0}=0$, так как $U(q_0)$ по условию есть минимум кривой потенциальной энергии. Условившись отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, мы получим также $U(q_0)=0$. Таким образом, разложение $U(q)$ будет начинаться лишь с члена второго порядка малости. Считая, что этот член не равен нулю, отбрасывая члены третьего порядка малости и выше и вводя обозначение

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q_0}=k, \tag{24,7}$$

где k согласно (24,2) существенно положительно, получим, что потенциальная энергия пропорциональна квадрату отклонения от положения равновесия:

$$U=\frac{kx^2}{2}. \tag{24,8}$$

Взяв разность кинетической энергии (24,6) и потенциальной (24,8), получим

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2. \tag{24,9}$$

Это и есть приближенное выражение функции Лагранжа вблизи положения устойчивого равновесия.

§ 25. Амплитуда и фаза

Составим теперь уравнение движения вблизи положения устойчивого равновесия. Воспользовавшись функцией Лагранжа (24,9), находим

$$m\ddot{x}+kx=0. \tag{25,1}$$

Разделив это уравнение на m и вводя величину ω

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{25,2}$$

получим

$$\ddot{x}+\omega^2x=0. \tag{25,3}$$

Следуя обычному приему решения линейных диференциальных уравнений, ищем показательное решение в виде

$$x=e^{st}, \tag{25,4}$$

где s — постоянная. Подставляя (25,4) в (25,3), получим для s характеристическое уравнение $s^2+\omega^2=0$, откуда $s=\pm i\omega$ и, таким образом,

$$x=Be^{i\omega t}+Ce^{-i\omega t}, \tag{25,5}$$

где B и C — произвольные постоянные.

Поскольку x действительная величина, она должна равняться своей комплексно сопряженной. Обозначая комплексно сопряженные величины через *, имеем отсюда

$$Be^{i\omega t}+Ce^{-i\omega t}=B^*e^{-i\omega t}+C^*e^{i\omega t}.$$

Ввиду произвольности t последнее равенство возможно только при $C=B^*$. ($C^*=B$ непосредственно вытекает из $C=B^*$), т. е. второй член правой части равенства (25,5) комплексно сопряжен первому. Но сумма двух комплексно сопряженных величин равна удвоенной действительной части одного из них, т. е. $x=\mathrm{Re}\,(2Be^{i\omega t})$, где символ $\mathrm{Re}\,(2Be^{i\omega t})$ означает, что берется действительная часть комплексного выражения. Обозначая $2B$ через A, получаем окончательно

$$x=\mathrm{Re}\,(Ae^{i\omega t}). \tag{25,6}$$

Чтобы перейти к вещественному виду этого выражения, положим

$$A=ae^{i\alpha}, \tag{25,7}$$

где a — модуль, а α — аргумент комплексной величины A.

Тогда

$$x=\mathrm{Re}\,(Ae^{i\omega t})=\mathrm{Re}\,(ae^{i(\omega t+\alpha)}),$$

или

$$x=a\cos(\omega t+\alpha). \tag{25,8}$$

Таким образом, около положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение. В связи с малостью величины x эти движения называют также *малыми колебаниями*.

Так как период $\cos\varphi$ равен 2π, то период колебаний $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Таким образом

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu, \tag{25,9}$$

где $\nu=\frac{1}{T}$ — частота колебаний. Величина ω называется циклической частотой. Амплитуда a, очевидно, равна максимальному значению отклонения x. Фаза [1]) α характеризует сдвиг колебания во времени.

Найдем теперь энергию системы, совершающей малые колебания. Так как

$$L=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2,$$

то

$$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}. \tag{25,10}$$

Заменив здесь k на $m\omega^2$, получим

$$E=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2). \tag{25,11}$$

---

[1]) Величину $\varphi=\omega t+\alpha$ иногда тоже называют фазой колебания.

Подставив сюда $x = a\cos(\omega t + \alpha)$; $\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t + \alpha)$, получим следующее выражение для энергии

$$E = \frac{m}{2}\omega^2 a^2. \tag{25,12}$$

Из этой формулы видно, что энергия прямо пропорциональна квадрату амплитуды и не зависит от фазы. Последнего и следовало ожидать потому, что, как уже указывалось выше, фаза соответствует только сдвигу колебания во времени.

Амплитуда a и фаза α являются произвольными постоянными интегрирования и могут быть определены из начальных условий, например, отклонения x_0 и скорости v_0 в какой-нибудь момент времени t_0. Если мы примем момент t_0 за начало отсчета времени, то начальные условия будут иметь следующий вид

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 \quad \text{и} \quad v = v_0.$$

Для большего удобства представим решение в форме

$$x = f\cos\omega t + g\sin\omega t.$$

откуда

$$\dot{x} = -f\omega\sin\omega t + g\omega\cos\omega t.$$

Если теперь положить $t = 0$ и приравнять первое выражение начальному отклонению x_0, а второе — начальной скорости v_0, то получим $x_0 = f$, $v_0 = g\omega$ и выражение для x примет вид

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Это выражение можно написать и в комплексной форме. Для этого вспомним, что $\cos\omega t = \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$; $\sin\omega t = \operatorname{Re}(-ie^{i\omega t})$. Отсюда

$$x = \operatorname{Re}\left(x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right)e^{i\omega t}. \tag{25,13}$$

Из формулы (25,7) видно, что амплитуда a и фаза α являются, соответственно, модулем и аргументом комплексной амплитуды A. Согласно (25,13) $A = x_0 - \frac{iv_0}{\omega}$; поэтому

$$a = \left|x_0 - \frac{iv_0}{\omega}\right| = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{25,14}$$

и

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \tag{25,15}$$

Задачи

1. Найти частоты малых колебаний системы, если ее функция Лагранжа имеет вид:

а) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x$. *Отв.* $\omega = 1$.

б) $L = \frac{\dot{x}^2 - x^2 - 1}{2x}$. *Отв.* $\omega = 1$.

в) $L = \operatorname{ch} x(\dot{x}^2 - 1)$. *Отв.* $\omega = \sqrt{2}/2$.

г) $L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}$. *Отв.* $\omega = \sqrt{2}/2$.

2. Найти отношение частот колебаний двух двухатомных молекул, если ядра одной из них являются изотопами ядер другой. Массы ядер равны, соответственно, m_1, m_2 и m_3, m_4.

Решение. Потенциальные энергии, а следовательно, и коэфициенты при квадратах координат в выражениях для потенциальных энергий, одинаковы у обеих молекул. Поэтому частоты их относятся как обратные корни из коэфициентов при половинах квадратов скоростей в кинетической энергии, т. е. из приведенных масс. Таким образом

$$\omega_1 : \omega_2 = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} : \sqrt{\frac{m_3 + m_4}{m_3 m_4}}.$$

3. Найти частоту колебаний точки с массой m, движущейся по прямой и прикрепленной к пружине, которая другим концом закреплена в точке A. Расстояние от точки A до прямой равно l. Пружина, имея длину l, натянута с силой F (рис. 22).

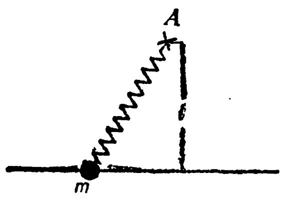


Рис. 22.

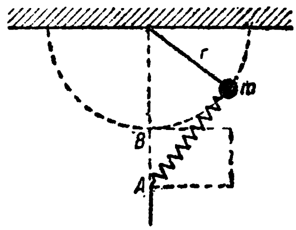


Рис. 23.

Решение. Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна силе F, помноженной на удлинение. Если обозначить отклонение точки m от положения равновесия через x, то для этого отклонения (так как $x \ll l$)

$$\sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l}.$$

Поэтому потенциальная энергия равна $U = \frac{Fx^2}{2l}$. Так как кинетическая энергия есть $\frac{m\dot{x}^2}{2}$, то $\omega = \sqrt{\frac{F}{lm}}$.

4. Найти частоту колебаний изображенной на рис. 23 системы, если пружина, находясь в положении AB, имеет длину l и натянута с силой F.

Решение. Удлинение пружины при отклонении отрезка r на малый угол φ от того положения, в котором пружина имеет длину l, составляет $\left(\text{так как } \cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)$

$$\sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} - l \approx \sqrt{l^2 + (l+r)r\varphi^2} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

Потенциальная энергия $U = \frac{F(r+l)r}{2l}\varphi^2$, а кинетическая $T = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}$. Отсюда частота $\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}$.

5. Найти частоту продольных колебаний системы, изображенной на рис. 24 (точка между двумя пружинками). Жесткости пружин равны соответственно k и l.

Отв. $\omega=\sqrt{\dfrac{k+l}{m}}$.

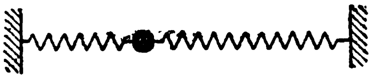


Рис. 24.

6. Определить зависимость координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия.

Решение. В положении неустойчивого равновесия потенциальная энергия $U(q_0)$ имеет максимум, т. е. $U'(q_0)=0$ и $U''(q_0)<0$. Разложив U в ряд по степеням $q-q_0=x$, мы получим $U=U_0-\dfrac{k}{2}x^2$. Уравнение движения будет $m\ddot{x}=kx$. Отсюда

$$x=C_1e^{\sqrt{k/m}\,t}+C_2e^{-\sqrt{k/m}\,t}.$$

7. Определить, как зависит от амплитуды период малых колебаний, если U'' в положении равновесия равно нулю.

Отв. Если $U''(q_0)=0$, то для наличия минимума U в этой точке, необходимо, чтобы $U'''(q_0)=0$, если при этом $U^{(IV)}>0$. Разложение U в ряд по $q-q_0=x$ дает тогда $U=U_0+Ax^4$, т. е. U есть однородная функция от x четвертого порядка (если выбрать начало отсчета так, чтобы $U_0=0$). Согласно § 13 период в этом случае обратно пропорционален размерам, т. е. амплитуде. Выражение для периода получает вид

$$T=2\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-Ax^4}}.$$

Полагая $x=\sqrt[4]{\dfrac{E}{A}}\sqrt{z}$, находим

$$T=2\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt[4]{\frac{E}{A}}\frac{1}{\sqrt{E}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}=\frac{2\sqrt{2m}}{\sqrt[4]{AE}}\int\limits_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Численный интеграл — эллиптический.

§ 26. Вынужденные колебания

В предыдущем параграфе рассматривались замкнутые системы. Малые колебания таких систем называют, обычно, *свободными малыми колебаниями*.

Перейдем теперь к рассмотрению малых колебаний незамкнутой системы. Мы рассматриваем только малые колебания, и поэтому внешнее поле, наложенное на систему, будем считать достаточно слабым. В этом случае в выражении потенциальной энергии мы получим кроме собственной потенциальной энергии $U(q)$ еще дополнительный член — потенциальную энергию воздействия поля на систему: $U_e(q,t)$. Раскладывая этот дополнительный член в ряд Тэйлора по степеням отклонения x и оставляя только первые два члена, получим

$$U_e(q,t)=U_e(q_0,t)+x\left(\frac{\partial U_e}{\partial q}\right)_{q_0}.$$

При составлении функции Лагранжа следует иметь в виду, что $U_e(q_0,t)$ как функцию только от времени можно отбросить как полную производную. Заметим еще, что $-\left(\frac{\partial U_e}{\partial q}\right)_{q_0}$ есть внешняя сила в положении равновесия и обозначим ее через $F(t)$. Таким образом, добавив к функции Лагранжа для свободных колебаний (24,9) дополнительный член $xF(t)$, получим функцию Лагранжа для вынужденных колебаний:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \tag{26,1}$$

Уравнение движения для вынужденных колебаний имеет вид $m\ddot{x} + kx = F(t)$ или, если мы разделим на m и введем собственную частоту $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t). \tag{26,2}$$

Рассмотрим сначала наиболее интересный случай, когда возмущающая сила имеет простой периодический характер, т. е.

$$F(t) = \mathrm{Re}\,(\Phi e^{i\gamma t}), \tag{26,3}$$

где

$$\Phi = f e^{i\delta} \tag{26,4}$$

есть комплексная амплитуда возмущающей силы, γ — ее частота.

Уравнение вынужденных колебаний (26,2) как линейное диференциальное уравнение можно интегрировать в комплексной форме и потом взять действительную часть. Для этого вместо $F(t)$ нужно подставить комплексную функцию $\Phi e^{i\gamma t}$. Тогда получим

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} \Phi e^{i\gamma t}. \tag{26,5}$$

Как известно, решение линейного неоднородного диференциального уравнения с постоянными коэфициентами получается в виде суммы двух решений: $x = x_0 + x_1$, где x_0 — решение однородного уравнения (свободные колебания), а x_1 — частное решение неоднородного уравнения (вынужденные колебания). Мы уже знаем, что

$$x_0 = Ae^{i\omega t}. \tag{26,6}$$

Для нахождения частного решения x_1 уравнения (26,5) ищем его в виде

$$x_1 = Be^{i\gamma t}, \tag{26,7}$$

где определению подлежит комплексная амплитуда B. Подставим это решение в уравнение (26,5). Сокращая обе части равенства на $e^{i\gamma t}$, получим

$$(-\gamma^2 + \omega^2) B = \frac{1}{m} \Phi,$$

откуда

$$B = \frac{\Phi}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \tag{26,8}$$

и частное решение

$$x_1 = \frac{\Phi}{m(\omega^2 - \gamma^2)} e^{i\gamma t}. \qquad (26,9)$$

Переходя от комплексного общего интеграла

$$x = x_0 + x_1 = Ae^{i\omega t} + \frac{\Phi}{m(\omega^2 - \gamma^2)} e^{i\gamma t}$$

к его действительной части, получим окончательное решение в виде суммы двух гармонических колебательных движений — собственного и вынужденного:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \delta). \qquad (26,10)$$

Постоянные интегрирования, амплитуда a и фаза α собственного колебания, могут быть определены из начальных условий.

§ 27. Резонанс

Если частота γ внешней силы приближается к частоте ω собственных колебаний, то получается усиление вынужденных колебаний, так как их амплитуда $\frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$ возрастает. Это явление называется *резонансом*.

При точном резонансе, когда $\gamma = \omega$, частное решение уравнения (26,5) уже не может быть записано в виде (26,9), так как амплитуда вынужденного колебания обращается в бесконечность. Поэтому в качестве частного решения вместо $Be^{i\gamma t}$ мы можем взять $x_1 = Be^{i\gamma t} - Be^{i\omega t}$, так как $Be^{i\omega t}$ есть решение однородного уравнения.

Найдем теперь предельное выражение этого частного решения в случае резонанса, т. е. при $\gamma = 0$. Ввиду (26,8), имеем

$$x_1 = \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\Phi}{m} \frac{e^{i\gamma t} - e^{i\omega t}}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{\gamma \to \omega} \frac{e^{i\gamma t} - e^{i\omega t}}{\omega^2 - \gamma^2} = -\frac{it}{2\omega} e^{i\omega t}.$$

Поэтому в случае резонанса частное решение соответствует апериодическому движению

$$x_1 = -\frac{it}{2m\omega} f e^{i(\omega t + \beta)}. \qquad (27,1)$$

Составляя действительную часть общего решения $x = x_0 + x_1$, где $x_0 = Ae^{i\omega t}$, имеем

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{tf}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta). \qquad (27,2)$$

Из этой формулы мы видим, что в случае резонанса амплитдуа вынужденного колебания хотя и не делается сразу бесконечно большой, но постепенно растет и притом пропорционально времени, так что колебания перестают быть малыми (рис. 25).

Рассмотрим теперь, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда $\gamma=\omega+\varepsilon$, где ε — малая величина. В этом случае формулу

$$x=Ae^{i\omega t}+Be^{i(\omega+\varepsilon)t}$$

можно переписать в виде

$$x=(A+Be^{i\varepsilon t})\,e^{i\omega t}.$$

Так как величина $A+Be^{i\varepsilon t}$ мало изменяется в течение периода собственных колебаний, то движение вблизи резонанса можно также рассматривать как малые колебания, но с переменными амплитудой и фазой. Это явление носит название *биений.*

Обозначив амплитуду колебаний через C, имеем

$$C=|A+Be^{i\varepsilon t}|.$$

Подставляя $A=ae^{i\alpha}$ и $B=be^{i\beta}$, имеем

$$C^2=|ae^{i\alpha}+be^{i(\beta+\varepsilon t)}|^2=a^2+b^2+$$
$$+2ab\cos(\varepsilon t+\beta-\alpha);$$

откуда

$$(a-b)^2\leqslant C^2\leqslant(a+b)^2.$$

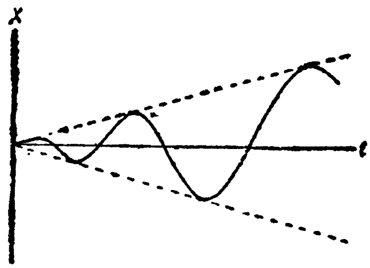


Рис. 25.

Таким образом амплитуда биений периодически изменяется между двумя пределами

$$|a-b|\leqslant C\leqslant a+b,$$

а частота биений ε равна разности между собственной частотой и частотой возмущающей силы.

Задачи

1. Найти вынужденные колебания точки под влиянием силы F, если в начальный момент $t=0$ координата и скорость равны нулю и частота свободных колебаний равна ω:

а) $F=a$.

Отв. $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\dfrac{a}{m\omega^2}$. Из начальных условий найдем $C_2=0$, $C_1=-\dfrac{a}{m\omega^2}$. Окончательно $x=\dfrac{a}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$.

б) $F=a\cos\alpha t$. *Отв.* $x=\dfrac{a}{m(\omega^2-\alpha^2)}(\cos\alpha t-\cos\omega t)$.

в) $F=a\sin\alpha t$. *Отв.* $x=\dfrac{a}{m(\omega^2-\alpha^2)}\left(\sin\alpha t-\dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

г) $F=at$. *Отв.* $x=\dfrac{a}{m\omega^2}\left(t-\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)$.

д) $F=ae^{-\alpha t}$. *Отв.* $x=\dfrac{a}{m(\omega^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\dfrac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$.

е) $F=ae^{-\alpha t}\cos\beta t$;

ж) $F=ae^{-\alpha t}\sin\beta t$.

Решение (е и ж). Пишем силу F в комплексной форме: $F = ae^{(-\alpha+i\beta)t}$. Тогда действительная часть решения дает решение для случая (е), а мнимая — случая (ж). Ищем частный интеграл в виде $be^{(-\alpha+i\beta)t}$. Подстановка в уравнение дает

$$b = \frac{a}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)-2i\alpha\beta}.$$

Действительная часть решения, т. е. решение для случая (е), есть

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \\ + \frac{ae^{-\alpha t}}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t + 2\alpha\beta\sin\beta t].$$

Начальные условия дают

$$x = \frac{a}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\omega t + \\ + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)\sin\omega t + e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\cos\beta t - 2\alpha\beta\sin\beta t]\Big\}.$$

Для задачи (ж), аналогично, получаем

$$x = \frac{a}{m[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\Big\{-2\alpha\beta\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)\sin\omega t + \\ + e^{-\alpha t}[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)\sin\beta t + 2\alpha\beta\cos\beta t]\Big\}.$$

2. Определить конечную амплитуду колебаний точки с массой $m = 1$ после действия внешней силы $F(t)$, если в начальный момент $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, для случаев:

а) $F = 0$ при $t < 0$, $F = \frac{t}{T}$ при $0 < t < T$, $F = 1$ при $t > T$ (рис. 26).

Решение. При $0 < t < T$, т. е. во время действия силы $F = \frac{t}{T}$, колебания, удовлетворяющие начальным условиям, имеют вид (см. задачу 1 д):

$$x = \frac{1}{T\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

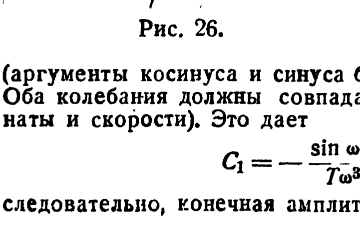


Рис. 26.

При $t > T$ действует сила $F = 1$ и потому колебание (см. задачу 1 а)

$$x = C_1\cos\omega(t-T) + C_2\sin\omega(t-T) + \frac{1}{\omega^2}$$

(аргументы косинуса и синуса берутся в таком виде из соображений удобства). Оба колебания должны совпадать при $t = T$ (в смысле совпадения координаты и скорости). Это дает

$$C_1 = -\frac{\sin\omega T}{T\omega^3}, \qquad C_2 = \frac{1}{T\omega^3}(1-\cos\omega T);$$

следовательно, конечная амплитуда

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{2}{T\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Чем постепеннее возрастает сила (чем больше T), тем меньше амплитуда возникающего колебания;

б) $F=0$ при $t<0$ и $t>T$, $F=a$ при $0<t<T$ (рис. 27).

Решение. При $0<t<T$, т. е. во время действия силы $F=a$

$$x=\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

При $t>T$ колебания свободны, т. е.

$$x=C_1\cos\omega(t-T)+C_2\sin\omega(t-T).$$

Оба колебания должны совпадать при $t=T$. Это дает

$$C_1=\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega T),\quad C_2=\frac{a}{\omega^2}\sin\omega T.$$

Конечная амплитуда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\frac{2a}{\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2};$$

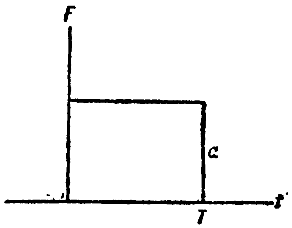


Рис. 27.

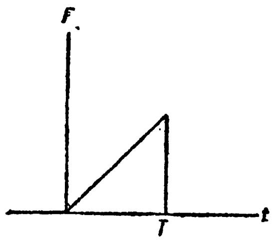


Рис. 28.

в) $F=0$ при $t<0$ и $t>T$, $F=t$ при $0<t<T$ (рис. 28).

Отв. При $t<T$ $x=\frac{1}{\omega^2}\left(t-\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$;

при $t>T$ $x=C_1\cos\omega(t-T)+C_2\sin\omega(t-T)$.

Условие совпадения колебаний при $t=T$ дает

$$C_1=\frac{1}{\omega^2}\left(T-\frac{\sin\omega T}{\omega}\right),$$

$$C_2=\frac{1}{\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

Конечная амплитуда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=$$

$$=\frac{1}{\omega^3}\sqrt{\omega^2T^2-2\omega T\sin\omega T+2(1-\cos\omega T)}.$$

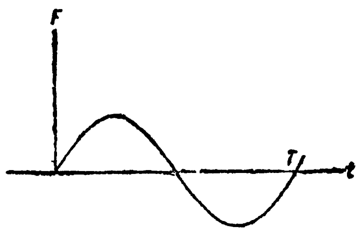


Рис. 29.

г) $F=0$ при $t<0$ и $t>T$, $F=\sin\omega t$ при $0<t<T$ $(\omega T=2\pi)$ (рис. 29).

Отв. При $0<t<T$ $\left(\text{где } T=\frac{2\pi}{\omega}\text{ — период собственных колебаний}\right)$: $x=\frac{1}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$. При $t>T$ имеем $x=C_1\cos\omega(t-T)+C_2\sin\omega(t-T)$. Для $t=T$ оба колебания должны совпадать, откуда $C_1=-\frac{T}{2\omega}=-\frac{T^2}{4\pi}$, $C_2=0$. Конечная амплитуда $A=\frac{T^2}{4\pi}$.

§ 28. Вынужденные колебания в случае произвольной силы

Вернемся теперь к рассмотрению вынужденных малых колебаний в случае произвольной внешней силы.

Уравнение движения (26,2) $\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{1}{m}F(t)$ легко проинтегрировать в общем виде, переписав его следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\omega x)-i\omega(\dot{x}+i\omega x)=\frac{1}{m}F(t).$$

Введя комплексную переменную

$$\xi=\dot{x}+i\omega x, \tag{28,1}$$

получаем линейное неоднородное диференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\xi}{dt}=i\omega\xi+\frac{F}{m}. \tag{28,2}$$

Интегрирование однородного уравнения $\dot{\xi}=i\omega t$ дает

$$\xi=Ce^{i\omega t}. \tag{28,3}$$

Чтобы проинтегрировать неоднородное уравнение (28,2), применим метод вариации постоянных, т. е. будем искать решение в виде (28,3), где C есть функция времени t. Подстановка дает

$$\dot{C}=\frac{F}{m}e^{-i\omega t},$$

откуда, если значение C при $t=0$ обозначим через C_0,

$$C(t)=\int_0^t \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}\,dt+C_0$$

и

$$\xi=e^{i\omega t}\left(\int_0^t \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}\,dt+C_0\right).$$

Обозначим значение ξ при $t=0$ через ξ_0. Тогда имеем непосредственно $\xi_0=C_0$ и

$$\xi=e^{i\omega t}\left(\int_0^t \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}\,dt+\xi_0\right). \tag{28,4}$$

Заменив теперь ξ на $\dot{x}+i\omega x$, можно сравнить действительные и мнимые части слева и справа в равенстве (28,4) и, таким образом, определить координату x в зависимости от времени.

Энергию системы, совершающей малые колебания, весьма просто можно выразить через ξ. Так как $|\xi|^2=\dot{x}^2+\omega^2x^2$, то из (25,11) следует

$$E=\frac{m}{2}|\xi|^2. \tag{28,5}$$

Найдем, например, количество энергии, переданное системе, которая в начальный момент времени $t=0$ покоилась в положении равновесия. Так как в этом случае $\xi_0=0$, то

$$\xi = e^{i\omega t}\int\limits_0^t \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t}\,dt, \tag{28,6}$$

и

$$E=\frac{m}{2}|\xi|^2=\frac{1}{2m}\left|\int\limits_0^t F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right|^2. \tag{28,7}$$

§ 29. Собственные частоты

Рассмотрим систему с несколькими степенями свободы, совершающую малые колебания около положения устойчивого равновесия. Как и в случае системы с одной степенью свободы, мы можем утверждать, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Поэтому, если мы обозначим координаты системы через $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то координаты положений равновесия $\overset{0}{q}_1, \overset{0}{q}_2, \ldots, \overset{0}{q}_n$ можно найти, решая систему уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{29,1}$$

Положим теперь

$$q_i=\overset{0}{q}_i+x_i \tag{29,2}$$

и найдем приближенный вид функции Лагранжа, считая координаты x_i и скорости $\dot{x}_i$ малыми величинами. Для кинетической энергии $T=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,k} a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k$, введя обозначения

$$a_{ik}(q_0)=m_{ik}, \tag{29,3}$$

получим приближенное выражение в виде квадратичной функции от обобщенных скоростей с постоянными коэфициентами

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k, \tag{29,4}$$

причем всегда можно сделать так, чтобы было (см. приложение)

$$m_{ik}=m_{ki}. \tag{29,5}$$

Найдем приближенное выражение для потенциальной энергии. Разлагая ее в ряд Тейлора, имеем

$$U=U_0+\sum_i\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_0}x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_{q_0}x_ix_k+$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,k,l}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_i\,\partial q_k\,\partial q_l}\right)_{q_0}x_ix_kx_l+\ldots$$

Но в положении устойчивого равновесия $x_i = 0$, потенциальная энергия имеет минимум; поэтому

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_0} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пренебрежем величинами третьего порядка малости и выше и введем обозначение

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_{q_0} = K_{ik}. \tag{29,6}$$

Тогда получим

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\sum K_{ik} x_i x_k, \tag{29,7}$$

причем опять

$$K_{ik} = K_{ki}. \tag{29,8}$$

Отбрасывая U_0 как постоянную, имеем

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} K_{ik} x_i x_k. \tag{29,9}$$

Это и есть окончательный вид функции Лагранжа для малых колебаний со многими степенями свободы.

Составим теперь уравнения движения $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$. Для этого, пользуясь выражением (29,9) для функции Лагранжа, найдем обобщенные импульсы $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ и обобщенные силы $F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$. Мы имеем

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_k\, d\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_i\, d\dot{x}_k - \\ - \frac{1}{2}\sum_{i,k} K_{ik} x_k\, dx_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} K_{ik} x_i\, dx_k.$$

Величина суммы не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования; поэтому, изменяя во второй и четвертой сумме i на k, а k на i и замечая, что $m_{ik} = m_{ki}$ и $K_{ik} = K_{ki}$, получим

$$dL = \sum_{i,k} m_{ik}\dot{x}_k\, d\dot{x}_i - \sum_{i,k} K_{ik} x_k\, dx_i,$$

откуда

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik}\dot{x}_k, \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\sum_k K_{ik} x_k.$$

Таким образом уравнения Лагранжа $\dot{p}_i = F_i$ примут вид

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k + \sum_k K_{ik} x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{29,10}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
&m_{11}\ddot{x}_1+m_{12}\ddot{x}_2+\ldots+m_{1n}\ddot{x}_n+K_{11}x_1+K_{12}x_2+\ldots+K_{1n}x_n=0,\\
&m_{21}\ddot{x}_1+m_{22}\ddot{x}_2+\ldots+m_{2n}\ddot{x}_n+K_{21}x_1+K_{22}x_2+\ldots+K_{2n}x_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_{n1}\ddot{x}_1+m_{n2}\ddot{x}_2+\ldots+m_{nn}\ddot{x}_n+K_{n1}x_1+K_{n2}x_2+\ldots+K_{nn}x_n=0.
\end{aligned}$$

Следуя обычному способу, будем искать частные решения системы (29,10) в форме

$$x_k=A_ke^{i\omega t}, \tag{29,11}$$

где A_1, A_2, ..., A_n — некоторые, пока неопределенные, постоянные. Подставляя выражения (29,11) в систему (29,10), получаем, по сокращении на $e^{i\omega t}$, систему линейных однородных уравнений, которым должны удовлетворять постоянные A_1, A_2, ..., A_n:

$$\sum_k(-\omega^2m_{ik}+K_{ik})A_k=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{29,12}$$

Для того чтобы система однородных уравнений имела решения, отличные от нулевых, определитель системы должен обращаться в нуль:

$$|K_{ik}-\omega^2m_{ik}|=0. \tag{29,13}$$

Уравнение (29,13), называемое *характеристическим*, служит для определения частот ω. Так как оно n-й степени относительно ω^2, то решая его, мы получим для ω^2 n значений:

$$\omega^2=\omega_\alpha^2 \quad (\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{29,14}$$

где α — номер частного решения. Величины $\omega=\omega_\alpha$ носят название *собственных частот* системы. Подставляя одну из собственных частот $\omega=\omega_\alpha$ в систему (29,12), находим соответствующие значения для коэфициентов A_k. Как известно, эти коэфициенты пропорциональны минорам определителя (29,13), в котором ω заменена соответствующей собственной частотой ω_α. Обозначим эти миноры через $\Delta_{k\alpha}$. Частное решение системы (29,10) имеет, следовательно, вид

$$x_k=\Delta_{k\alpha}A_\alpha e^{i\omega_\alpha t}, \tag{29,15}$$

где A_α — некоторая произвольная (комплексная) постоянная.

Общее решение равно сумме частных решений. Переходя к действительной части, имеем

$$x_k=\mathrm{Re}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta_{k\alpha}A_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\Big) \tag{29,16}$$

Отсюда видно, что каждая координата будет совершать движение, которое является наложением n гармонических колебаний.

Задачи

1. Найти собственные частоты, если:

а) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)$.

Решение. Составляем уравнения движения:

$$\ddot{x}+\frac{1}{2}\ddot{y}+x-\frac{1}{2}y=0,$$

$$\ddot{y}+\frac{1}{2}\ddot{x}+y-\frac{1}{2}x=0.$$

Ищем x и y в виде $x=A_1e^{i\omega t}$, $y=A_2e^{i\omega t}$. Подставляя это в оба уравнения, находим

$$A_1(1-\omega^2)-\frac{1}{2}A_2(1+\omega^2)=0,$$

$$-\frac{1}{2}A_1(1+\omega^2)+A_2(1-\omega^2)=0.$$

Составляем уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\frac{1}{2}(1+\omega^2) \\ -\frac{1}{2}(1+\omega^2) & 1-\omega^2 \end{vmatrix}=0.$$

Решая его, находим: $\omega_1=\sqrt{3}$, $\omega_2=\sqrt{3}/3$;

б) $L=\frac{1}{2}(2\dot{x}^2+2\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(3x^2+2y^2)$. *Отв.* $\omega_1=\sqrt{6}$, $\omega_2=1$.

в) $L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\frac{2}{5}\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+\frac{2}{5}yz+z^2\right)$.

Отв. $\omega_1=1$, $\omega_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\omega_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

г) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}(x^2+xy+y^2+2z^2+yz)$.

Отв. $\omega_1^2=1$, $\omega_2^2=\frac{9+\sqrt{57}}{6}$, $\omega_3^2=\frac{9-\sqrt{57}}{6}$.

2. Найти собственные частоты, если:

а) $L=\frac{1}{2}(x\dot{x}^2+y\dot{y}^2)-\left(\frac{1}{xy}+x+y\right)$.

Решение. Находим x и y, соответствующие минимуму потенциальной энергии, из условий:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=1-\frac{1}{yx^2}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=1-\frac{1}{xy^2}=0.$$

Отсюда $x_0=y_0=1$. Значения вторых производных в этой точке:

$$U''_{xx}=U''_{yy}=2,\qquad U''_{xy}=1.$$

Разложение в ряд дает

$$U=U_0+\frac{1}{2}\{U''_{xx}(x-x_0)^2+2U''_{xy}(x-x_0)(y-y_0)+U''_{yy}(y-y_0)^2\}.$$

Подставляя $x=y=1$ в выражение для кинетической энергии и вводя отклонения от положения равновесия $x_1=x-1$, $y_1=y-1$, получим

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)-(x_1^2+y_1^2+x_1y_1),$$

откуда:

$$\omega_1=1,\qquad \omega_2=\sqrt{3};$$

б) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2)-(x^3-y^3+3xy)$. *Отв.* $\omega_1=\omega_2=\sqrt{6}$.

в) $L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}+\dot{y}^2)-\left(\ln xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$. *Отв.* $\omega_1=\sqrt{2}$, $\omega_2=\sqrt{6}/3$.

3. Найти частоту биений в случае колебаний двух слабо связанных систем, имеющих одинаковые собственные частоты, т. е. если

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+\alpha xy,$$

где $\alpha\ll\omega^2$.

Решение. Собственные частоты равны $\omega_1^2=\omega^2-\alpha$, $\omega_2^2=\omega^2+\alpha$. Ввиду того что $\alpha\ll\omega^2$, можно написать

$$\omega_1=\sqrt{\omega^2-\alpha}\approx\omega-\frac{\alpha}{2},\qquad \omega_2\approx\omega+\frac{\alpha}{2}.$$

В § 27, складывая два колебания с близкими частотами, мы нашли, что частота биений результирующего колебания равна разности частот. Поэтому частота биений равна $\omega_2-\omega_1=\alpha$.

§ 30. Нормальные координаты

Поскольку миноры $\Delta_{k\alpha}$ есть величины действительные, то полученное в предыдущем параграфе выражение общего интеграла уравнений движения может быть написано в виде

$$x_k=\sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\,\mathrm{Re}\,(A_\alpha e^{i\omega_\alpha t})\quad (k=1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{30,1}$$

В этом выражении от начальных условий зависят только комплексные коэфициенты A_α.

Вводя обозначения

$$\mathrm{Re}\,(A_\alpha e^{i\omega_\alpha t})=\theta_\alpha, \tag{30,2}$$

имеем

$$x_k=\sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\theta_\alpha. \tag{30,3}$$

Из выражений (30,2) и (30,3) ясно, что движение, совершаемое каждой из обобщенных координат является результатом наложения одних и тех же n простых периодических колебаний θ_1, θ_2, ..., θ_n, совершающихся с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты. Число этих простых колебаний равно числу степеней свободы системы.

Естественно поставить вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершала только одно простое колебание? Самая форма общего интеграла (30,3) указывает путь к решению поставленной задачи.

В самом деле, рассматривая n соотношений (30,3) как систему линейных уравнений с n неизвестными величинами θ_1, θ_2, ..., θ_n, мы можем, разрешив эту систему уравнений, выразить величины θ_1, θ_2, ..., θ_n через координаты x_1, x_2, ..., x_n. Следовательно, величины θ_α можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты носят название *нормальных* или *главных координат*, а совершаемые ими простые периодические колебания называются *главными колебаниями* системы.

Нормальные координаты θ_α удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{30,4}$$

Таким образом мы видим, что в нормальных координатах система уравнений движения распадается на n независимых друг от друга уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой координаты, и для полного определения одной из нормальных координат как функции времени мы должны знать только ее собственные начальные отклонения и начальную скорость и не нуждаемся в знании начальных значений остальных нормальных координат и соответствующих им скоростей. Иными словами главные колебания системы независимы друг от друга.

Поэтому функция Лагранжа для системы, совершающей малые колебания, если выбрать в качестве координат системы нормальные координаты, будет равна сумме функций Лагранжа для малых колебаний систем с одной степенью свободы, т. е.

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2), \tag{30,5}$$

где m_α — некоторые постоянные. Отсюда видно, между прочим, что введением нормальных координат θ_α, т. е. преобразованием (30,3), две квадратичные формы — для кинетической энергии T и для потенциальной U [см. (29,9)] — одновременно приводятся к главным осям.

Коэфициенты m_α, зависящие от выбора миноров $\Delta_{k\alpha}$, определяются непосредственным преобразованием функции Лагранжа (29,9) к нормальным координатам при помощи формул (30,3).

Обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэфициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны единице. Для этого достаточно положить

$$\sqrt{m_\alpha}\, \theta_\alpha = Q_\alpha. \tag{30,6}$$

Подставляя (30,6) в (30,5), получим

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2). \tag{30,7}$$

Это и есть функция Лагранжа системы, совершающей малые колебания, в нормальных координатах.

Энергия в нормальных координатах Q_α, есть

$$E = \sum_\alpha \frac{1}{2} (\dot{Q}_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2). \tag{30,8}$$

Решения задачи о малых колебаниях системы со многими степенями свободы сводится к нахождению собственных частот ω_α и нормальных координат Q_α. Собственные частоты находят, решая уравнение (29,13). Чтобы найти нормальные координаты, проще всего подставить значение координат x_k для α-го колебания $x_k = \Delta_{k\alpha}\theta_\alpha$ в выражение (29,4) для кинетической энергии, которое тогда получит вид $\frac{m_\alpha \dot{\theta}_\alpha^2}{2}$. После этого полагаем $\theta_\alpha = \frac{Q_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}}$.

Пользование нормальными координатами дает возможность привести вынужденные колебания системы с несколькими степенями свободы к вынужденным колебаниям систем с одной степенью свободы. Обозначим через L_0 функцию Лагранжа замкнутой системы; тогда функцию Лагранжа с дополнительным членом, соответствующим взаимодействию системы с внешним полем, мы можем написать в виде

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)\, x_k. \tag{30,9}$$

Вводя вместо координат x_k нормальные координаты, получим

$$L = L_0 + \sum_{k,\alpha} F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}} Q_\alpha.$$

Введем обозначения

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}; \tag{30,10}$$

тогда

$$L = L_0 + \sum_\alpha f_\alpha Q_\alpha = \sum_\alpha L_\alpha, \tag{30,11}$$

где

$$L_\alpha = \frac{1}{2}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + f_\alpha Q_\alpha \tag{30,12}$$

есть функция Лагранжа для координаты Q_α. Отсюда видно, что уравнение движения для одной нормальной координаты Q_α совершенно не зависит от всех остальных координат и задача непосредственно приводится к задаче о вынужденных колебаниях систем с одной степенью свободы.

Задача

Найти нормальные колебания для случаев:

а) задачи 1 а, § 29.

Решение. Подставляя в уравнения движения $x = A_1 e^{i\omega t}$, $y = A_2 e^{i\omega t}$, находим уравнения

$$A_1(1-\omega^2) - \frac{1}{2} A_2 (1+\omega^2) = 0,$$

$$-\frac{1}{2} A_1 (1+\omega^2) + A_2 (1-\omega^2) = 0.$$

Собственные частоты равны $\omega_1^2 = 3$, $\omega_2^2 = \frac{1}{3}$. Подставляя в уравнения для A_1 и A_2 сначала $\omega^2 = 3$, находим после упрощения

$$A_{11} + A_{21} = 0,$$

$$A_{11} + A_{21} = 0.$$

Отсюда $\frac{A_{11}}{1} = \frac{A_{21}}{-1} = C_1$ или $A_{11} = C_1$, $A_{21} = -C_1$. Подставляя $\omega^2 = \frac{1}{3}$, найдем после упрощения

$$-A_{12} + A_{22} = 0,$$
$$-A_{12} + A_{22} = 0.$$

Отсюда $\frac{A_{12}}{1} = \frac{A_{22}}{1} = C_2$, или $A_{12} = C_2$, $A_{22} = C_2$. Для уравнений

$$x = A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2,$$
$$y = A_{21}Q_1 + A_{22}Q_2,$$

получаем

$$x = C_1Q_1 + C_2Q_2,$$
$$y = -C_1Q_1 + C_2Q_2.$$

Подставляя $\dot{x}$ и $\dot{y}$ в выражение для кинетической энергии, находим $T = \frac{1}{2}(C_1^2\dot{Q}^2 + 3C_2^2\dot{Q}_2^2)$. Полагая $C_1^2 = 1$ и $3C_2^2 = 1$, находим $C_1 = 1$, $C_2 = \sqrt{3}/3$. Поэтому нормальные колебания будут:

$$Q_1 = \frac{1}{2}(x - y), \quad Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y).$$

б) задачи 1 б) § 29. *Отв.* $Q_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(y - x)$, $Q_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(3x + 2y)$.

§ 31. Колебания одной материальной точки

Если материальная точка колеблется около положения устойчивого равновесия и мы поместим в это положение начало декартовой системы координат, то кинетическая и потенциальная энергии будут иметь вид

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{31,1}$$

$$U = \frac{K_{ik}r_ir_k}{2}. \tag{31,2}$$

Вместо того чтобы приводить задачу к нормальным координатам так, как это было сделано в предыдущем параграфе, мы можем прямо перейти к нормальным координатам, повернув оси координат так, чтобы они совпали с главными осями тензора K_{ik}. Тогда потенциальная энергия тоже будет содержать только квадраты скоростей и функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(K_1x^2 + K_2y^2 + K_3z^2), \tag{31,3}$$

где K_1, K_2 и K_3 — главные значения тензора K_{ik}.

Функция Лагранжа (31,3) является суммой функций Лагранжа малых колебаний, соответственно, по координатам x, y и z

$$L = \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{K_1}{2}x^2\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{y}^2 - \frac{K_2}{2}y^2\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{z}^2 - \frac{K_3}{2}z^2\right). \tag{31,4}$$

Отсюда видно, что точка совершает три независимых колебания по трем главным направлениям с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K_3}{m}}. \tag{31,5}$$

Легко видеть, что решение (31,5) не является новым решением задачи, а вытекает из полученных ранее формул. В самом деле, кинетическую энергию (31,1) можно написать в виде

$$T = \frac{m}{2}\dot{r}_i^2 = \frac{m}{2}\dot{r}_i\dot{r}_k\delta_{ik}.$$

Сравнивая это с (29,4), мы видим, что $m_{ik} = m\delta_{ik}$. Поэтому уравнение (29,13) для определения собственных частот, принимает вид

$$|K_{ik} - \omega^2 m\delta_{ik}| = 0,$$

т. е. $m\omega^2$ есть главные значения тензора K_{ik}.

Движение точки особенно упрощается в случае, если поле, в котором происходит движение, обладает центральной симметрией относительно положения равновесия. Действительно, так как тогда $U = \frac{kr^2}{2} = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, то выбор осей координат является произвольным. Всякие три взаимно перпендикулярные направления могут быть выбраны за направления главных колебаний.

Как уже указывалось раньше, движение в поле с центральной симметрией является плоским. Чтобы определить траекторию точки, возьмем плоскость движения за плоскость x, y и напишем выражение для координат x и y точки в виде

$$x = A\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y = B\cos(\omega t + \beta).$$

Введем обозначения

$$\omega t + \alpha = \varphi; \quad \beta - \alpha = \delta. \tag{31,6}$$

Тогда

$$x = A\cos\varphi,$$
$$y = B\cos(\varphi + \delta) = B\cos\varphi\cos\delta - B\sin\varphi\sin\delta.$$

Определив из последних равенств $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и составив сумму их квадратов, приравняем ее единице. Тогда получим уравнение траектории в виде

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\delta = \sin^2\delta. \tag{31,7}$$

Таким образом точка описывает эллипс с центром в начале координат. То обстоятельство, что движение в поле с потенциальной энергией $U = \frac{kr^2}{2}$ происходит по замкнутой кривой, а не заполняет кольцо как в общем случае, было уже упомянуто выше, в конце § 19.

Задача

Найти траекторию частицы с массой $m = 1$, совершающей малые колебания, если

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{10}(5x^2 + 6xy + 5y^2)$$

и при $t = 0$

$$x_0 = y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 5\sqrt{2/5}, \quad \dot{y}_0 = 3\sqrt{2/5},$$

Решение. Полагая в уравнениях движения $x = Ae^{i\omega t}$, $y = Be^{i\omega t}$, находим $\omega_1 = 2\sqrt{2/5}$, $\omega_2 = \sqrt{2/5}$. Далее, $A_1 = B_1 = a$, $A_2 = -B_2 = b$, где a и b — новые произвольные постоянные. Из начальных условий находим $a = 2$, $b = 1$. Таким образом

$$x = 2\sin 2\sqrt{2/5}\,t + \sin\sqrt{2/5}\,t,$$

$$y = 2\sin 2\sqrt{2/5}\,t - \sin\sqrt{2/5}\,t;$$

отсюда

$$\sin\sqrt{2/5}\,t = \frac{1}{2}(x-y), \quad \sin 2\sqrt{2/5}\,t = \frac{1}{4}(x+y).$$

Определив $\cos\sqrt{2/5}\,t$, находим $\frac{1}{4}(x+y) = \sin 2\sqrt{2/5}\,t = 2\sin\sqrt{2/5}\,t\cos\sqrt{2/5}\,t = 2\cdot\frac{1}{2}(x-y)\sqrt{1-\frac{1}{4}(x-y)^2}$; откуда

$$(x+y)^2 = 4(x-y)^2[4-(x-y)^2].$$

Повернув оси координат на 45°, т. е. положив

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}},$$

найдем более простое уравнение

$$X^2 = 8Y^2(2-Y^2).$$

§ 32. Колебания при отсутствии внешнего поля

Если мы имеем дело с системой точек, взаимодействующих друг с другом, но ненаходящихся во внешнем поле, то кроме колебательного движения эта система может еще двигаться как целое, совершать поступательное и вращательное движения. При нахождении собственных частот это скажется таким образом, что часть частот обратится в нуль, поскольку потенциальная энергия не зависит от координат, соответствующих поступательному и вращательному движениям.

Так как поступательное и вращательное движения удобно рассматривать отдельно, то их следует исключить с самого начала. Чтобы исключить поступательное движение, полагают координаты центра инерции равными нулю. Чтобы исключить вращательное движение, следует положить момент системы равным нулю. Так как момент не является полной производной по времени от какой-либо функции координат, то условие равенства нулю момента системы нельзя, вообще говоря, представить в таком виде, что какая-то координата постоянно остается равной нулю. Однако в случае малых колебаний это сделать возможно. В самом деле, если мы в выражении для момента системы $\sum m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a$ положим $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{q}_a$, где $\mathbf{r}_{a0}$ — независящие от времени (так как момент системы мы положили равным нулю) координаты точки в положении равновесия, а $\mathbf{q}_a$ — отклонения от положения равновесия, то, пренебрегая величинами второго порядка малости, мы получим

$$\sum m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a = \sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \dot{\mathbf{q}}_a = \frac{d}{dt}\sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{q}_a.$$

Проекции вектора $\sum m_a \mathbf{r}_{a0} \times \mathbf{q}_a$ можно рассматривать как нормальные координаты, соответствующие вращению системы. Положив эти координаты, как и координаты центра инерции, равными нулю, мы исключаем с самого начала из рассмотрения шесть координат, соответствующих трем поступательным и трем вращательным степеням свободы.

Если система состоит из N точек, то в общем случае количество колебательных степеней свободы, очевидно, равно $3N-6$.

Если система точек плоская, то можно различать нормальные колебания, при которых точки движутся в плоскости системы, и нормальные колебания, при которых точки движутся перпендикулярно этой плоскости. Можно легко определить количество тех и других колебаний. Так как всего для плоского движения имеется $2N$ степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная, то количество нормальных колебаний, не выводящих точек из плоскости, равно $2N-3$. Всего же колебательных степеней свободы $3N-6$. Следовательно, $N-3$ колебания выводят точки из плоскости. При симметрии системы точек соответствующей симметрией обладают и нормальные колебания. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в связи с волновой механикой.

Если система точек, имеет форму прямой, то так как говорить о вращении вокруг этой прямой не имеет смысла, то вращательных степеней свободы остается только две. Соответственно этому полное число колебательных степеней свободы равно $3N-5$. В частности, это относится к системе, состоящей из двух частиц, которая имеет $3 \cdot 2 - 5 = 1$ колебательную степень свободы, что, впрочем, очевидно.

В случае линейной системы можно различать колебания, при которых сис.ема сохраняет форму прямой линии, и колебания, которые выводят точки с прямой. Так как всего при движении точек по линии имеется N степеней свободы, из которых одна поступательная, то количество нормальных колебаний, не выводящих точек с прямой, равно $N-1$. Всего же колебательных степеней свободы $3N-5$. Следовательно, $2N-4$ колебания выводят точки с прямой линии.

Проведем через прямую, на которой расположены частицы системы, какую-нибудь плоскость. Согласно предыдущему число колебаний в одной плоскости есть $2N-3$. Из них выводящих точки с прямой $(2N-3)-(N-1)=N-2$. Если провести через ту же прямую еще другую плоскость, перпендикулярную первой, то и в ней будет $N-2$ колебания и притом, как это следует из соображений симметрии, эти нормальные колебания будут иметь те же собственные частоты. Всякие другие движения точек, выводящие точки с прямой, можно представить в виде совокупности тех и других колебаний. Поэтому все $2N-4$ нелинейных колебания распадаются на две группы по $N-2$ колебаний во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Число различных собственных частот складывается из $N-1$ частот линейных колебаний и $N-2$ частот колебаний, выводящих с прямой. Поэтому оно равно $2N-3$.

§ 33. Ангармонические колебания

Теория малых колебаний есть теория приближенная. В предыдущих параграфах этой главы мы ограничивались в функции Лагранжа членами второго порядка малости. Однако ряд явлений, имеющих место при движении механической системы вблизи положения устойчивого равновесия, не могут быть объяснены при помощи такого приближения. В таких случаях приходится рассматривать следующее приближение, т. е. учитывать в функции Лагранжа члены выше второго порядка малости. Движения системы при этом оказываются несколько отличными от рассмотренных нами выше гармонических малых колебаний и носят название *ангармонических колебаний*.

Рассмотрим сначала ангармонические колебания системы с одной степенью свободы. Точная функция Лагранжа есть

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q). \tag{33,1}$$

Разлагая коэфициент $a(q)$ и потенциальную энергию $U(q)$ в ряд Тейлора по степеням отклонения x от положения устойчивого равновесия, получим

$$a(q) = a(q_0) + x\left(\frac{da}{dq}\right)_{q_0} + \ldots,$$

$$U(q) = U(q_0) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q_0} + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3U}{dq^3}\right)_{q_0} + \ldots$$

Вводя обозначения

$$a(q_0) = m, \quad \left(\frac{da}{dq}\right)_{q_0} = n, \quad \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q_0} = k, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d^3U}{dq^3}\right)_{q_0} = l \tag{33,2}$$

и оставляя в функции Лагранжа (33,1) только члены второго и третьего порядков малости, получим

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + \frac{n}{2}x\dot{x}^2 - \frac{l}{3}x^3. \tag{33,3}$$

Два последних члена в этой функции Лагранжа характеризуют ангармоничность колебаний. Если одновременно $n = 0$ и $l = 0$, то в разложениях $a(q)$ и $U(q)$ следует учесть еще члены высших порядков малости.

Уравнение движения

$$m\ddot{x} + kx + nx\ddot{x} + \frac{n}{2}\dot{x}^2 + lx^2 = 0 \tag{33,4}$$

теперь уже не линейно, так как содержит члены с x^2, $\dot{x}^2$ и $x\ddot{x}$. Поэтому полное решение теперь уже не будет линейной комбинацией отдельных частных решений и вообще процесс решения уравнения значительно осложняется. Мы можем, однако, воспользоваться тем обстоятельством, что те члены, которые нарушают линейность уравнения (33,4), являются членами более высокого порядка малости.

Уравнения, в которых различные члены имеют различный порядок малости, решаются методом последовательных приближений. Этот метод состоит в том, что решение уравнения также рассматривается в виде суммы членов различного порядка малости, причем первое приближение, т. е. член первого порядка, получают, пренебрегая вовсе в точном уравнении всеми членами высших порядков малости. Член второго порядка находят, решая уравнение, которое получается заменой в точном уравнении членов высшего порядка малости, найденным уже решением в первом приближенном. Подобным же образом находят и высшее приближение.

Чтобы рассмотреть применение метода последовательных приближений на возможно более простом примере, ограничимся случаем, когда $n=0$. Выводя обозначения $\frac{k}{m}=\omega^2$ и $\frac{l}{m}=\mu$, получим уравнение движения

$$\ddot{x}+\omega^2 x=-\mu x^2. \tag{33,5}$$

Решение уравнения ищем в виде ряда

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots, \tag{33,6}$$

где $x^{(1)}$ — член первого порядка малости, $x^{(2)}$ — второго, и т. д. Подставляя ряд (33,6) в уравнение (33,5), получим

$$(\ddot{x}^{(1)}+\ddot{x}^{(2)}+\ldots)+\omega^2(x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots)=$$
$$=-\mu(x^{(1)}+x^{(2)}+\ldots)^2. \tag{33,7}$$

Оставляя здесь только члены первого порядка малости, имеем: $\ddot{x}^{(1)}+\omega^2 x^{(1)}=0$. Отсюда находим решение в первом, гармоническом, приближении:

$$x^{(1)}=a\cos(\omega t+\alpha). \tag{33,8}$$

Напишем теперь в уравнении (33,7) члены второго порядка малости

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega^2 x^{(2)}=-\mu x^{(1)2}.$$

Подставив вместо $x^{(1)}$ найденное выражение (33,8), получим

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega^2 x^{(2)}=-\mu a^2\cos^2(\omega t+\alpha).$$

Это уравнение можно написать также в виде

$$\ddot{x}^{(2)}+\omega^2 x^{(2)}=-\frac{\mu a^2}{2}-\frac{\mu a^2}{2}\cos(2\omega t+2\alpha);$$

откуда

$$x^{(2)}=-\frac{\mu a^2}{2\omega^2}-\frac{\mu a^2}{6\omega^2}\cos(2\omega t+2\alpha). \tag{33,9}$$

Таким образом, более точное решение уравнения, т. е. первое и второе приближение вместе, будет

$$x=x^{(1)}+x^{(2)}=a\cos(\omega t+\alpha)-\frac{\mu a^2}{2\omega^2}-\frac{\mu a^2}{6\omega^2}\cos(2\omega t+2\alpha). \tag{33,10}$$

Сравнивая полученное нами решение (33,10) с прежним (25,8), когда не было члена μx^2, мы видим, что теперь в движении системы появилось гармоническое колебание с удвоенной частотой. Дальнейшие приближения привели бы к колебаниям с утроенной, учетверенной и т. д. частотами. Такие гармонические колебания с кратными частотами именуются *обертонами* второго, третьего, четвертого и т. д. порядков. Кроме того, формула (33,10) содержит постоянный член, благодаря которому колебания становятся несимметричными по отношению к положению равновесия. Эта асимметрия всегда имеет место в том случае, если потенциальная энергия содержит нечетные степени отклонения x. Четные степени x дают только симметричные колебания.

Перейдем теперь к ангармоническим колебаниям системы с несколькими степенями свободы. Точная функция Лагранжа в этом случае имеет вид:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}a_{ik}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_k-U(q). \tag{33,11}$$

Разлагая коэфициенты $a_{ik}(q)$ и потенциальную энергию в ряд Тейлора, получим

$$a_{ik}(q)=a_{ik}(q_0)+\sum_l\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l}\right)_{q_0}x_l+\ldots,$$

$$U(q)=U_0+\sum_i\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_0}x_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)x_ix_k+$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,k,l}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_i\,\partial q_k\,\partial q_l}\right)x_ix_kx_l+\ldots$$

Вводя обозначения

$$a_{ik}(q_0)=m_{ik},\quad\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l}\right)_{q_0}=n_{ikl},\quad\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_k}\right)_{q_0}=k_{ik},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial q_i\,\partial q_k\,\partial q_l}\right)=l_{ikl} \tag{33,12}$$

и оставляя в функции Лагранжа только члены второго и третьего порядков малости, получим следующее выражение для функции Лагранжа, учитывающей ангармоничность колебаний:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,k}m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k-\frac{1}{2}\sum_{i,k}k_{ik}x_ix_k+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}n_{ikl}\dot{x}_i\dot{x}_kx_l-\frac{1}{3}\sum_{i,k,l}l_{ikl}x_ix_kx_l. \tag{33,13}$$

Если мы перейдем к нормальным координатам Q_α, то в силу линейности этих преобразований третья и четвертая суммы в функции Лагранжа (33,13) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат x_i и скоростей $\dot{x}_i$ будут Q_α и $\dot{Q}_\alpha$. Обозначив коэфициенты в этих суммах через $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ и $\mu_{\alpha\beta\gamma}$, соответственно, получим функцию Лагранжа в нормальных координатах

$$L=\sum_\alpha\frac{1}{2}(\dot{Q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2Q_\alpha^2)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\dot{Q}_\alpha\dot{Q}_\beta Q_\gamma-\frac{1}{3}\sum_{\alpha\beta\gamma}\mu_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma. \tag{33,14}$$

Из этой функции Лагранжа получим уравнения ангармонических колебаний в виде

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{33,15}$$

где f_α — некоторая однородная функция второго порядка от координат Q и их производных по времени. Применяя метод последовательных приближений, будем решение уравнения (33,15) искать в виде ряда

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)} + \ldots \tag{33,16}$$

В первом приближении имеем

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0; \tag{33,17}$$

откуда

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \tag{33,18}$$

Второе приближение определяется из уравнений

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}). \tag{33,19}$$

Подставив в правую часть этих уравнений выражения (33,18), мы можем преобразовать их к сумме простых периодических функций. Так, например,

$$\begin{aligned} Q_\beta^{(1)} Q_\gamma^{(1)} &= a_\beta a_\gamma \cos(\omega_\beta t + \varphi_\beta)\cos(\omega_\gamma t + \varphi_\gamma) = \\ &= \frac{1}{2} a_\beta a_\gamma \{\cos[(\omega_\beta + \omega_\gamma)t + \varphi_\beta + \varphi_\gamma] + \cos[(\omega_\beta - \omega_\gamma)t + \varphi_\beta - \varphi_\gamma]\}. \end{aligned}$$

Таким образом в правой части этого уравнения находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Поэтому во втором приближении на главные колебания системы, имеющей частоты ω_α, накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_\alpha + \omega_\beta, \quad \omega_\alpha - \omega_\beta, \quad 2\omega_\alpha, \quad 0.$$

Эти частоты носят название *комбинационных частот*. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям амплитуд главных колебаний или, соответственно, квадратам этих амплитуд.

Таким образом, мы видим, что ангармоничность колебаний во втором приближении приводит к тому, что система совершает движение, состоящее из наложения собственных и комбинационных колебаний.

Задача

Найти ангармонические колебания, если:

а) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$.

Отв.: $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, где $x^{(1)} = A\cos(t + \alpha)$,

$$x^{(2)} = -\frac{A^3}{32}\cos(3t + 3\alpha) + \frac{3A^3}{8} t \sin(t + \alpha).$$

б) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(4x^2 + y^2) + x^2 y$.

Отв. $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, где:

$$x^{(1)} = A\cos(2t + \alpha), \quad y^{(1)} = B\cos(t + \beta),$$

$$x^{(2)} = -\frac{AB}{5}\cos(3t + \alpha + \beta) + \frac{AB}{3}\cos(t + \alpha - \beta),$$

$$y^{(2)} = -\frac{A^2}{30}\cos(4t + 2\alpha) + \frac{A^2}{2}.$$

в) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y.$

Отв. $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, где

$$x^{(1)} = A\cos(t + \alpha), \quad y^{(1)} = B\cos(t + \alpha),$$

$$x^{(2)} = -\frac{2AB}{3}\cos(2t + \alpha + \beta), \quad y^{(2)} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{6}\cos(2t + 2\alpha).$$

§ 34. Диссипативная функция

До сих пор мы всегда считали, что те координаты, которыми мы пользовались, вполне характеризуют состояние системы. В действительности большинство тел, движение которых приходится рассматривать, состоит из огромного числа частиц и для полной характеристики состояния следовало бы задавать движение всех атомов тела. Во многих случаях можно, однако, при рассмотрении движения тела как целого отвлечься от внутреннего движения его частей, как мы это и делали до сих пор.

Если влиянием внутреннего движения на движение тела как целого пренебречь нельзя, то законы движения приобретают весьма сложный характер. Так, например, если q_i — координаты, соответствующие движению системы как целого, то мы не можем более утверждать, что состояние характеризуется $2n$ величинами q_i и $\dot{q}_i$. Так как внутреннее движение атомов тела зависит не только от движения тела в данный момент времени, но и от истории этого движения, то в уравнение движения будут, вообще говоря, входить не только q_i $\dot{q}_i$ и $\ddot{q}_i$, но и все производные высших порядков: $\dddot{q}_i$ $\ddddot{q}_i$ и т. д. Функция Лагранжа для движения системы как целого при этом, конечно, не существует. Энергия, связанная с движением тела как целого не сохраняется. Как доказывается в статистике, всегда происходит рассеяние энергии, т. е. энергия движения системы как целого уменьшается за счет возрастания энергии внутреннего движения атомов. Уравнения движения системы с рассеянием энергии, как только что было указано, содержат производные различных порядков и в различных случаях имеют совершенно различный характер. Поэтому они не могут быть рассмотрены в общем виде.

Единственный случай, который имеет некоторое общее значение, — это случай, когда скорости $\dot{q}_i$ движения системы как целого можно считать достаточно медленно изменяющимся со временем, для того чтобы в уравнениях движения можно было пренебречь производными выше второго порядка. В этом случае рассеяние энергии можно характеризовать введением дополнительных членов в уравнение Лагранжа. Уравнения движения принимают при этом следующий вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=f_i(q,\ \dot{q}). \tag{34,1}$$

Силы f_i называются *диссипативными силами*. Примером таких сил могут служить силы трения, т. е. силы сопротивления среды, в которой движется некоторое тело.

Если скорости $\dot{q}_i$ малы, мы можем функции f_i разложить в ряды по степеням скоростей и ограничиться членами первого порядка. Члены нулевого порядка исчезают, так как покоящаяся система энергии не рассеивает. Таким образом силы f_i являются линейными функциями обобщенных скоростей. При этом, как доказывается статистикой, эти линейные функции скоростей не произвольны. А именно, существует такая квадратичная функция обобщенных скоростей F, что все диссипативные силы выражаются при помощи соотношения

$$f_i=-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}. \tag{34,2}$$

Функция F называется *диссипативной функцией* системы.

Таким образом в случае медленных движений незамкнутой макроскопической системы существует диссипативная функция F и уравнения движения системы как целого принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}. \tag{34,3}$$

Диссипативная функция характеризует интенсивность рассеяния энергии незамкнутой системой. В самом деле, энергия движения системы как целого равна

$$E=\sum p_i\dot{q}_i-L.$$

Изменение энергии системы в единицу времени есть

$$\frac{dE}{dt}=\sum \dot{p}_i\dot{q}_i+\sum p_i\ddot{q}_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i-\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i.$$

Легко видеть, что вторая сумма взаимно уничтожается с четвертой. Заменяя, на основании уравнений движения (34,3) в первой сумме $\dot{p}_i$ на $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$, получим просто

$$\frac{dE}{dt}=-\sum\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i.$$

Диссипативная функция является квадратичной функцией скоростей Применяя к ней теорему Эйлера об однородных функциях, найдем

$$\frac{dE}{dt}=-2F. \tag{34,4}$$

Как уже было указано выше, энергия движения системы как целого всегда уменьшается. Поэтому $\frac{dE}{dt} < 0$. Отсюда следует, что диссипативная функция может принимать только положительные значения, т. е., как и кинетическая энергия, является существенно положительной квадратичной формой

$$F = \frac{l_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}{2} > 0.$$

Из формулы (34,4) следует также, что диссипативная функция представляет половину потери или рассеяния энергии, рассчитанную на единицу времени. В связи с этим F называют иногда также *функцией рассеяния.*

Подставив для лагранжевой функции обычное выражение $L = \frac{m_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}{2} - U$ и пренебрегая в уравнении (34,3) членами с высшими степенями скорости, получим для уравнений движения при рассеянии энергии

$$m_{ik}\ddot{q}_k + l_{ik}\dot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \tag{34,5}$$

Задачи

1. Найти уравнение движения, если задана функция Лагранжа и диссипативная функция:

а) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 5y^2)$, $F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - 3\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2)$.

Отв. $\ddot{x} + \dot{x} - \frac{3}{2}\dot{y} + 3x = 0$, $2\ddot{y} - 3\dot{x} + 2\dot{y} + 5y = 0$.

б) $L = \frac{1}{2}(4\dot{x}^2 + 3\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2)$, $F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2)$.

Отв. $4\ddot{x} + \frac{3}{2}\ddot{y} + \dot{x} = 0$, $\ddot{y} + \frac{3}{2}\ddot{x} + 3\dot{y} = 0$.

в) $L = \frac{1}{2}(x\dot{x}^2 + y\dot{y}^2) - \left(\frac{1}{xy} + x + y\right)$, $F = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{y}^2}{y}\right)$.

Отв. $x\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{x} + 1 - \frac{1}{x^2y} = 0$, $y\ddot{y} + \frac{\dot{y}}{y} + 1 - \frac{1}{xy^2} = 0$,

2. Написать уравнения малых колебаний:

а) двойного маятника (см. задача 3 в § 6), если сила сопротивления среды движению первой точки есть $\alpha_1 v_1$, а второй $\alpha_2 v_2$, где v_1 и v_2 — скорости обеих точек.

Решение. Функция Лагранжа, найденная в задаче 3 в § 6, для малых колебаний маятника, т. е. при малых φ и θ, принимает вид

$$L = \frac{m_1 a^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(a\dot{\varphi} + b\dot{\theta})^2 - \frac{m_1 + m_2}{2}ga\varphi^2 - \frac{m_2}{2}gb\theta^2.$$

Диссипативная функция $F=\frac{\alpha_1 v_1^2}{2}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2}$, а скорости v_1 и v_2 равны $a\dot{\varphi}$ и $a\dot{\varphi}+b\dot{\theta}$. Поэтому

$$F=\frac{\alpha_1 a^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{\alpha_2(a\dot{\varphi}+b\dot{\theta})^2}{2}.$$

Уравнения движения

$$(m_1+m_2)a^2\ddot{\varphi}+m_2ab\ddot{\theta}+(m_1+m_2)ga\varphi+(\alpha_1+\alpha_2)a^2\dot{\varphi}+\alpha_2ab\dot{\theta}=0,$$

$$m_2ab\ddot{\varphi}+m_2b^2\ddot{\theta}+m_2gb\theta+\alpha_2ab\dot{\varphi}+\alpha_2b^2\dot{\theta}=0.$$

б) То же, если поглощение энергии пропорционально квадрату относительной угловой скорости обоих маятников.

Решение. Относительная угловая скорость равна $\dot{\varphi}-\dot{\theta}$, поэтому $\dot{E}=-\alpha(\dot{\varphi}-\dot{\theta})^2$, где α — постоянная, а диссипативная функция

$$F=\frac{\alpha}{2}(\dot{\varphi}-\dot{\theta})^2.$$

Беря L из предыдущей задачи, находим уравнения движения:

$$(m_1+m_2)a^2\ddot{\varphi}+m_2ab\ddot{\theta}+(m_1+m_2)ga\varphi+\alpha(\dot{\varphi}-\dot{\theta})=0,$$

$$m_2ab\ddot{\varphi}+m_2b^2\ddot{\theta}+m_2gb\theta+\alpha(\dot{\theta}-\dot{\varphi})=0.$$

§ 35. Движение в среде

Рассмотрим движение материальной точки в некоторой однородной среде. Поскольку среду мы будем предполагать также изотропной, диссипативная функция будеть зависеть только от абсолютной величины скорости движущейся частицы, т. е.

$$F=\frac{lv^2}{2}. \tag{35,1}$$

Отсюда следует, что уравнение движения частицы в среде имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}-l\mathbf{v}. \tag{35,2}$$

Если никакого внешнего поля нет, то потенциальная энергия отсутствует и, интегрируя однородное уравнение $m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-l\mathbf{v}$, мы получим

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0e^{-\frac{l}{m}t}, \tag{35,3}$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость частицы в момент времени $t=0$. Таким образом мы видим, что при отсутствии других сил, кроме сил трения, скорость частицы движущейся в среде затухает по экспоненциальному закону.

Интегрируя уравнение движения еще раз, получаем

$$\mathbf{r}=-\frac{m}{l}\mathbf{v}_0e^{-\frac{l}{m}t}+\text{const},$$

или, если мы обозначим значение $\mathbf{r}$ при $t=0$ через $\mathbf{r}_0$:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\frac{m}{l}\mathbf{v}_0\left(1-e^{-\frac{l}{m}t}\right). \tag{35,4}$$

Так как при $t\to\infty$ выражение в скобках обращается в единицу, то максимальное расстояние, которое может пройти в среде частица, обладающая начальной скоростью $\mathbf{v}_0$, равно $\frac{mv_0}{l}$.

В случае постоянного однородного поля уравнение движения (35,2) приобретает вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{f}-l\mathbf{v},$$

где $\mathbf{f}$ — напряженность поля. Отбрасывая в правой части этого уравнения силу $\mathbf{f}$, получим однородное уравнение, общий интеграл которого равен $\mathbf{A}e^{-\frac{l}{m}t}$. Прибавляя еще частное решение неоднородного уравнения, которым, очевидно, является постоянный вектор $\frac{\mathbf{f}}{l}$, получим общий интеграл в виде

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{f}}{l}+\mathbf{A}e^{-\frac{l}{m}t}. \tag{35,5}$$

При $t\to\infty$ второе слагаемое исчезает. Отсюда видно, что через достаточно большой промежуток времени точка будет двигаться практически с постоянной скоростью, равной $\frac{\mathbf{f}}{l}$.

Коэфициент $\frac{1}{l}$, равный скорости, которую в данной среде приобретает частица под действием единичной силы, называется обычно *подвижностью*.

§ 36. Затухающие колебания с одной степенью свободы

Обратимся теперь к рассмотрению малых колебаний механической системы около положения устойчивого равновесия при наличии диссипативных сил f_i.

Сначала рассмотрим случай одной степени свободы. Отклонение от положения равновесия обозначим через x. Воспользуемся для кинетической и потенциальной энергий их прежними приближенными выражениями: $T=\frac{m\dot{x}^2}{2}$, $U=\frac{kx^2}{2}$. Диссипативная функция, как было выяснено в предыдущем параграфе, пропорциональна квадрату скорости. Положим $F=\frac{l\dot{x}^2}{2}$, где коэфициент пропорциональности l есть постоянная положительная величина.

Сила трения $f=-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=-l\dot{x}$ пропорциональна скорости и направлена противоположно движению. Уравнение движения для рассматриваемого случая принимает, следовательно, вид

$$m\ddot{x}+l\dot{x}+kx=0. \tag{36,1}$$

Разделим это уравнение на m и введем обозначения $\frac{l}{m}=2\lambda$ и $\frac{k}{m}=\omega_0^2$, где ω_0 есть, очевидно, частота собственных колебаний системы, которые имели бы место при отсутствии сил трения. Величина λ носит название *логарифмического декремента затухания.*

Уравнение (36,1) принимает тогда вид

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{36,2}$$

Чтобы найти частное решение этого уравнения, положим $x=e^{st}$, и получим для s характеристическое уравнение

$$s^2+2\lambda s+\omega_0^2=0,$$

откуда $s=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$.

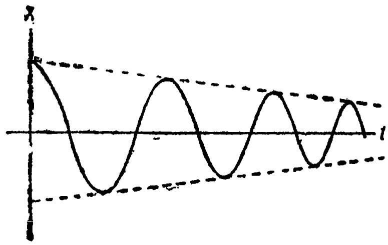


Рис. 30.

Общее решение уравнения (36,2) получим, взяв сумму частных решений e^{s_1t} и e^{s_2t}, помноженных на произвольные постоянные

$$x=c_1e^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}+c_2e^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}.$$

В зависимости от относительной величины декремента затухания λ и частоты ω_0 свободных колебаний без трения мы должны различать три случая:

$$\text{I. } \lambda<\omega_0. \quad \text{II. } \lambda>\omega_0. \quad \text{III. } \lambda=\omega_0.$$

В случае I радикал мнимый и корни характеристического уравнения принимают вид

$$s=-\lambda\pm i\sqrt{\omega_0-\lambda^2}. \tag{I}$$

Общее решение уравнения может поэтому быть представлено в виде

$$x=\operatorname{Re}\left(Ae^{-\lambda t+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t}\right),$$

где A — произвольная комплексная постоянная.

Иначе это решение можно написать еще так:

$$x=ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha), \tag{36,3}$$

где $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$.

Движение системы, выражаемое формулой (36,3) является гармоническим колебанием около положения равновесия с постоянно убывающей амплитудой, величина которой приближается к нулю (рис. 30). Этот тип движения носит название *затухающих колебаний*. Трение, как этого и следовало ожидать, уменьшает частоту колебания потому, что вообще задерживает движение. Впрочем при слабом трении уменьшение частоты незначительно, потому что декремент λ стоит под корнем во второй степени.

На основании формулы (36,3) мы можем заключить, что средние за период значения квадрата координаты и квадрата скорости пропорциональны $e^{-2\lambda t}$. Отсюда видно, что энергия осциллятора в среднем убывает по закону

$$\overline{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \tag{36,4}$$

где E_0 есть значение энергии осциллятора в момент времени $t = 0$.

В случае II, когда $\lambda > \omega_0$, радикал вещественный и корни характеристического уравнения имеют вид

$$s = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \tag{II}$$

Движение происходит по закону

$$x = Ae^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + Be^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}. \tag{36,5}$$

Так как абсолютная величина радикала меньше λ, то как s_1 так и s_2 — величины отрицательные и потому x убывает с возрастанием времени, обращаясь в нуль при $t \to \infty$. Таким образом движение системы, представленное равенством (36,5), состоит в асимптотическом приближении к положению равновесия без колебаний. Этот тип движения носит название *апериодического затухания.*

В случае III, когда $\lambda = \omega_0$, характеристическое уравнение имеет один двойной корень $s = -\lambda$ и поэтому

$$x = (A + Bt)\, e^{-\lambda t}. \tag{36,6}$$

Это тоже особый случай апериодического движения.

Задачи

1. Определить начальную амплитуду и фазу затухающего колебания в зависимости от декремента λ и частоты ω, если при $t = 0$ $x = x_0$ и $\dot{x} = v_0$.

Решение. Из формулы (36,3) находим

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\lambda x_0 + v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\lambda x_0 + v_0}{\omega x_0}$$

2. Найти движение в случае апериодического колебания с коэфициентами затухания s_1 и s_2, если при $t = 0$, $x = x_0$ и $\dot{x} = v_0$.

Отв. $x = \dfrac{(v_0 + s_2 x_0)\, e^{-s_1 t} - (v_0 + s_1 x_0)\, e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}$.

§ 37. Вынужденные затухающие колебания

Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда на систему, совершающую затухающие малые колебания около положения равновесия, действует еще какая-нибудь внешняя сила, которая задана как функция времени. Наиболее интересен тот случай, когда внешняя сила является простой периодической функцией времени.

Диференциальное уравнение вынужденных затухающих колебаний мы напишем в следующей форме:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\alpha t. \tag{37,1}$$

Для удобства перейдем, как и в § 25, к уравнению в комплексной форме:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\alpha t}. \tag{37,2}$$

Найдя частное решение этого уравнения и отделяя в нем вещественную часть, мы, очевидно, получим частное решение уравнения (37,1).

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (37,2) в виде

$$x = Be^{i\alpha t}, \tag{37,3}$$

где B — некоторый неопределенный пока еще коэфициент. Подставив (37,3) в (37,2), имеем по сокращении на $e^{i\alpha t}$ $B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha)}$.

Таким образом частное решение уравнения вынужденных колебаний (37,1) имеет вид

$$x = \mathrm{Re}\frac{f}{m(\omega_0^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha)} e^{i\alpha t}. \tag{37,4}$$

Обозначим через A и δ модуль и аргумент комплексной амплитуды B, т. е. положим

$$\frac{f}{m(\omega_0^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha)} = Ae^{i\delta}.$$

Отсюда следует

$$A = \left|\frac{f}{m(\omega_0^2 - \alpha^2 + 2\lambda i\alpha)}\right| = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2}} \tag{37,5}$$

и

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\alpha}{\omega_0^2 - \alpha^2}. \tag{37,6}$$

Частное решение уравнения вынужденных затухающих колебаний имеет таким образом вид

$$x = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2}}\cos(\alpha t + \delta). \tag{37,7}$$

Общее решение уравнения (37,1) получим, взяв сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения уравнения без правой части

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \beta) + A\cos(\alpha t + \delta).$$

Так как первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, то через достаточно большой промежуток времени остается только член (37,7), т. е. вынужденная часть колебания.

Наибольший интерес представляет область вблизи резонанса, когда частота внешней силы α мало отличается от частоты собственных колебаний ω_0.

Положим $\alpha = \omega_0 + \varepsilon$, где ε — малая величина. Пренебрегая малыми величинами высших порядков относительно ε и λ, мы можем в формуле (37,7) в знаменателе преобразовать первое слагаемое $(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 = (\omega_0 + \alpha)^2 (\omega_0 - \alpha)^2 = 4\omega_0^2 \varepsilon^2$, а во втором слагаемом просто заменить α^2 на ω_0^2. Тогда получим

$$x = \frac{f}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \varepsilon^2}} \cos(\alpha t + \delta). \tag{37,8}$$

Отсюда видно, что когда частота внешней силы приближается к частоте собственных колебаний системы, амплитуда вынужденных колебаний быстро возрастает.

Рассмотрим поглощение энергии системой, совершающей вынужденные затухающие колебания. При установившемся движении, когда система совершает вынужденное колебание (37,7), энергия движения системы как целого в среднем не изменяется. Поэтому количество энергии, поглощенное системой в единицу времени, равное потере энергии на трение, как было выяснено в § 34, равно удвоенной диссипативной функции. Обозначая среднюю интенсивность поглощения в единицу времени при частоте внешней силы, равной α, через $I(\alpha)$ имеем, следовательно,

$$I(\alpha) = 2\overline{F}.$$

Вычисляем диссипативную функцию. На основании ее определения и формулы (37,7) имеем

$$F = \frac{l\dot{x}^2}{2} = \lambda m \dot{x}^2 = \lambda m \alpha^2 A^2 \sin^2(\alpha t + \delta).$$

Среднее значение квадрата синуса за большой промежуток времени равно половине. Действительно, за каждый период

$$\overline{\sin^2(\alpha t + \delta)} = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\alpha t + \delta)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos 2(\alpha t + \delta)}{2}\, dt = \frac{1}{2},$$

так как изменение значения косинуса за полный период равно нулю.

Таким образом:

$$I(\alpha) = \lambda m \alpha^2 A^2. \tag{37,9}$$

Подставляя вместо амплитуды A ее выражение (37,5), получим

$$I(\alpha) = \frac{\lambda \alpha^2 f^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + 4\lambda^2\alpha^2}. \tag{37,10}$$

Отсюда видно, что интенсивность поглощения энергии зависит от частоты внешней силы α, сильно возрастая при резонансе, когда частота внешней силы приближается к частоте собственных колебаний ω_0. Вблизи резонанса мы можем в формуле (37,9) заменить α^2 на ω_0^2 и подставить приближенное выражение для амплитуды A из (37,8). Тогда получим

$$I(\varepsilon) = \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{m} \frac{1}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \tag{37,11}$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*. *Шириной резонансной кривой* называется расстояние $\Delta\varepsilon$ от середины кривой, на котором интенсивность уменьшается на половину, т. е.

$$I(\Delta\varepsilon) = \frac{1}{2} I(0).$$

Из формулы (37,11) легко получаем, что величина полуширины резонансной кривой равна декременту затухания

$$\Delta\varepsilon = \lambda. \tag{37,12}$$

С другой стороны, полагая в (37,11) $\varepsilon = 0$, находим, что высота резонансной кривой обратно пропорциональна λ. Таким образом при уменьшении декремента затухания резонансная кривая становится уже и выше, т. е. ее максимум становится более острым. Площадь резонансной кривой оказывается независящей от декремента затухания. Частота α может изменяться от 0 до ∞. При этом $\varepsilon = \alpha - \omega_0$ изменяется от $-\omega_0$ до ∞. Но так как $I(\varepsilon)$ велико только при малых значениях ε, то величина интеграла $\int\limits_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon)\,d\varepsilon$ не изменится существенно при замене его нижнего предела на $-\infty$. Тогда получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\,d\varepsilon = \left(\frac{f}{2}\right)^2 \frac{\lambda}{m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\lambda^2 + \varepsilon^2} = \frac{\pi}{m}\left(\frac{f}{2}\right)^2,$$

т. е. действительно не зависит от λ.

Задача

Определить вынужденные затухающие колебания при наличии внешней силы $f = e^{-\alpha t}\cos\beta t$ $(m = 1)$.

Решение. Уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{-\alpha t}\cos\beta t$. То же уравнение в комплексной форме

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = e^{(-\alpha + i\beta)t}.$$

Полагая $x = Ae^{(-\alpha + i\beta)t}$, находим

$$A = \frac{1}{(-\alpha + i\beta)^2 + 2\lambda(-\alpha + i\beta) + \omega_0^2}.$$

Если положить $A = ae^{i\delta}$, то

$$x = ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \delta),$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\lambda\alpha)^2 + 4\beta^2(\alpha - \lambda)^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\beta(\alpha - \lambda)}{\omega_0^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2\lambda\alpha}.$$

§ 38. Затухающие колебания со многими степенями свободы

Перейдем теперь к рассмотрению затухающих малых колебаний системы с несколькими степенями свободы. Выражения для кинетической и потенциальной энергий вблизи положения равновесия, а также для диссипативной функции нам уже известны: $T=\frac{1}{2}\sum m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$, $U=\frac{1}{2}\sum k_{ik}x_ix_k$, $F=\frac{1}{2}\sum l_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$. Силы сопротивления f_i равны $f_i=-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}=-\sum l_{ik}\dot{x}_k$. Таким образом система уравнений затухающих малых колебаний в случае n степеней свободы имеет вид

$$\sum_k m_{ik}\ddot{x}_k+\sum_k l_{ik}\dot{x}_k+\sum k_{ik}x_k=0. \tag{38,1}$$

Положив

$$x_k=A_k e^{st}, \tag{38,2}$$

где s одно и то же для всех x_k, получаем, по сокращении на e^{st}, систему линейных уравнений для определения постоянных A_k

$$\sum_k (m_{ik}s^2+l_{ik}s+k_{ik})A_k=0. \tag{38,3}$$

Для того чтобы эти линейные уравнения удовлетворялись значениями A_k, не равными нулю одновременно, должен равняться нулю характеристический определитель системы

$$|m_{ik}s^2+l_{ik}s+k_{ik}|=0, \tag{38,4}$$

что дает уравнение $2n$-й степени для определения s.

Поскольку коэфициенты характеристического уравнения (38,4) вещественны, то корни его попарно комплексно-сопряженны. Из физических соображений ясно, что вещественные части этих корней будут, как и в формуле (36, II), отрицательны. Поэтому корни можно написать в виде

$$s_\alpha=-\lambda_\alpha+\mu_\alpha i.$$

При достаточно большом трении движение становится чисто апериодическим. В этом случае μ_α исчезают и корни становятся вещественными. Напротив, в случае затухающих малых колебаний корни s_α комплексны.

Подставляя корни характеристического уравнения поочередно в уравнения (38,3), находим для каждого корня значения постоянных A_k, которые пропорциональны минорам $\Delta_{k\alpha}$ определителя $|m_{ik}s_\alpha^2+l_{ik}s_\alpha+k_{ik}|$. Таким образом общий интеграл уравнений движения имеет вид

$$x_k=\mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta_{k\alpha}A_\alpha e^{-s_\alpha t}. \tag{38,5}$$

Здесь A_α произвольные, комплексные для комплексных корней уравнения (38,4), постоянные интегрирования.

Движение системы, выражаемое уравнениями (38,5), представляется как результат наложения друг на друга затухающих гармонических колебаний около положения равновесия.

З а д а ч а

Найти логарифмические декременты затухания по данным функции Лагранжа и диссипативной функции:

а) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, $F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y})$.

Р е ш е н и е. Уравнения движения

$$\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + \dot{y} + \frac{1}{2}\dot{x} = 0.$$

Полагая $\dot{x} = C_1 e^{-\lambda t}$, $\dot{y} = C_2 e^{-\lambda t}$, находим

$$C_1(1-\lambda) + \frac{1}{2}C_2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}C_1 + C_2(1-\lambda) = 0;$$

откуда получаем уравнение для определения λ:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

из которого находим декременты затухания $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Это — декременты затухания скоростей; очевидно они совпадают с декрементами затухания координат. Кроме них для координат, очевидно, возможно $\lambda = 0$.

б) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y})$, $F = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2)$. *Отв.* $\lambda_1 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_2 = \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$.

ГЛАВА V

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 39. Угловая скорость

Твердым телом мы будем называть систему материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Абсолютно неизменяемых систем в природе, конечно, нет. Но большинство твердых тел в обычных условиях так мало изменяют свою форму и свои размеры, что при изучении законов движения и покоя твердого тела, рассматриваемого как нечто целое, мы можем отвлечься от этих изменений и считать такие тела за системы вполне неизменяемые.

Для описания движения твердого тела относительно „неподвижной", т. е. инерциальной системы координат X, Y, Z, мы будем пользоваться „движущейся" системой $x_1 x_2 x_3$ (рис. 31), которую мы представим себе неизменно связанной с материальными точками твердого тела и участвующей во всех его движениях. Начало движущейся системы координат мы поместим, для удобства, в центре инерции твердого тела, Положение твердого тела относительно неподвижной системы координат вполне определяется заданием положения движущейся системы координат относительно неподвижной. Пусть радиус-вектор $\mathbf{R}$ указывает положение начала O движущейся системы координат. Ориентировка осей этой системы относительно неподвижной, как известно, определяется тремя независимыми углами, так что совместно с R_x, R_y, R_z мы имеем шесть координат. Таким образом твердое тело представляет собой систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Это перемещение можно представить себе в виде бесконечно малого параллельного переноса твердого тела, при котором центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентировке относительно неподвижных осей, и бесконечно малого поворота вокруг центра инерции, в результате которого все твердое тело приходит в конечное положение.

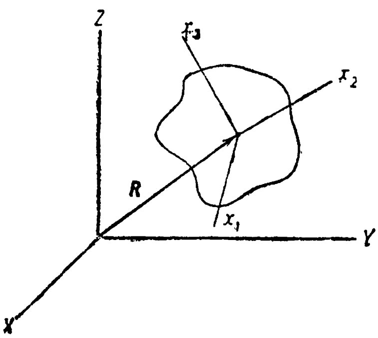


Рис. 31.

Пусть $\mathfrak{r}$ есть радиус-вектор некоторой произвольной точки P твердого тела в неподвижной системе координат, а $\mathbf{r}$ — в движущейся. Тогда $\mathfrak{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ и бесконечно малое перемещение точки P есть

$$d\mathfrak{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{r}.$$

Здесь $d\mathbf{R}$ есть перемещение центра инерции твердого тела, а $d\mathbf{r}$ — перемещение относительно центра инерции. Обозначая бесконечно малый угол поворота через $d\boldsymbol{\varphi}$, мы имеем (§ 12)

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}.$$

Полное перемещение точки P выразится суммой

$$d\mathfrak{r} = d\mathbf{R} + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}. \tag{39,1}$$

Разделив это равенство на время dt, в течение которого произошло рассматриваемое бесконечно малое перемещение, и вводя скорости

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}; \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \tag{39,2}$$

получаем соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \tag{39,3}$$

Вектор $\mathbf{V}$ есть скорость центра инерции твердого тела и поэтому представляет собой поступательную скорость твердого тела. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ называется *угловой скоростью* вращения твердого тела. Таким образом скорость любой точки твердого тела может быть выражена через поступательную скорость $\mathbf{V}$ и угловую скорость вращения твердого тела $\boldsymbol{\Omega}$.

Допустим теперь, что для описания движения твердого тела мы выбрали систему координат, начало которой находится не в центре инерции, а в некоторой точке O' на расстоянии **a** от центра инерции. Поступательную скорость этой системы координат обозначим через $\mathbf{V}$, а угловую скорость ее вращения — через $\mathbf{\Omega}$.

Рассмотрим снова какую-нибудь произвольную точку P твердого тела и обозначим ее радиус-вектор относительно начала O' через $\mathbf{r}'$. Тогда (рис. 32) $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$; подставляя это выражение в (39,3), имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'.$$

Таким образом скорость $\mathbf{V}'$ нового начала координат равна $\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{a}$, а угловая скорость вращения вокруг нового начала координат $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$ — остается неизменной.

Угловая скорость, с которой вращается в данный момент неподвижно связанная с телом система координат, оказывается совершенно независящей от выбора этой системы. Для определенного момента времени угловая скорость всех мыслимых, неподвижно связанных с телом систем координат имеет одно и то же значение. Это и дает нам право величину $\mathbf{\Omega}$ называть угловой скоростью вращения всего твердого тела.

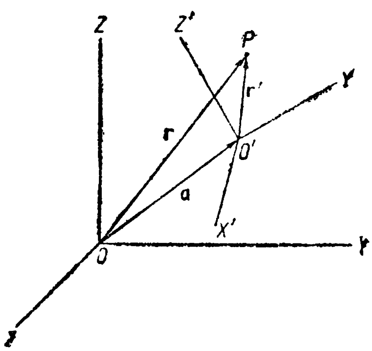


Рис. 32.

§ 40. Тензор инерции

Твердое тело является одним из частных случаев системы материальных точек, поэтому функция Лагранжа твердого тела может быть определена по общей формуле

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} - U, \tag{40,1}$$

где сумма распространяется по всем материальным точкам, составляющим твердое тело.

Воспользовавшись разложением скорости $\mathbf{v}$ каждой точки твердого тела относительно неподвижной системы координат на поступательную и вращательную скорости

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}, \tag{40,2}$$

мы получим следующее выражение для кинетической энергии твердого тела:

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{m}{2} [\mathbf{V} + (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})]^2 =$$
$$= \sum \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 + \sum m\mathbf{V}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + \sum \frac{m}{2} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2.$$

Скорости $\mathbf{V}$ и $\mathbf{\Omega}$ одинаковы для всех точек твердого тела; поэтому множители, зависящие только от них, можно вынести за знак суммы. Вынесем за знак первой суммы $\frac{V^2}{2}$ и обозначим массу твердого тела через μ:

$$\sum m = \mu, \tag{40,3}$$

тогда

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum m = \frac{\mu V^2}{2}.$$

Что касается второй суммы, то она обращается в нуль, если мы примем центр инерции за начало движущейся системы координат, так как в этом случае $\sum m\mathbf{r} = 0$, и

$$\sum m\mathbf{V} \cdot (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum m\mathbf{r} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}) = (\mathbf{V} \times \mathbf{\Omega}) \cdot \sum m\mathbf{r} = 0.$$

Преобразовав в третьей сумме квадрат векторного произведения, получим

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \sum \frac{m}{2} \{\Omega^2 r^2 - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2\}.$$

Мы видим, что кинетическая энергия твердого тела может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии поступательного движения центра инерции, в котором нужно принять сосредоточенной всю массу тела, и кинетической энергии вращательного движения вокруг некоторой мгновенной оси, проходящей через центр инерции.

Пусть r_i и Ω_i — компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$ и угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ по осям движущейся системы координат. Переписав последнюю сумму в этих компонентах, подставив $\Omega_i = \Omega_k \delta_{ik}$ (см. прилож. § 3) и вынося $\frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k$ за знак суммы, последовательно получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu V^2}{2} + \sum \frac{m}{2} \{\Omega_i^2 r_l^2 - \Omega_i r_i \Omega_k r_k\} = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \sum \frac{m}{2} \{\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} r_l^2 - \Omega_i \Omega_k r_i r_k\} = \\ &= \frac{\mu V^2}{2} + \frac{\Omega_i \Omega_k}{2} \sum m (r_l^2 \delta_{ik} - r_i r_k). \end{aligned}$$

Вводя тензор

$$I_{ik} = \sum m (r_l^2 \delta_{ik} - r_i r_k), \tag{40,4}$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I_{ik}\Omega_i\Omega_k}{2}. \tag{40,5}$$

Тензор I_{ik} носит название *тензора моментов инерции* или просто *тензора инерции*. Как ясно из определения (40,4) он симметричен, т. е.

$$I_{ik} = I_{ki}. \tag{40,6}$$

Функцию Лагранжа твердого тела мы можем теперь написать в виде

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I_{ik}\Omega_i\Omega_k}{2} - U, \tag{40,7}$$

причем потенциальная энергия U зависит от каких-либо шести координат, определяющих положение твердого тела, например от трех координат X, Y, Z центра инерции и трех углов, определяющих ориентировку осей движущейся системы координат относительно неподвижной. Компоненты I_{ik} тензора инерции в системе координат, связанной с твердым телом, при движении твердого тела остаются неизменными. Компоненты же по осям неподвижной системы координат будут, конечно, меняться.

Если оси движущейся системы координат направить по главным осям тензора инерции (см. прилож. § 7), то диагональные компоненты этого тензора будут равны его главным значениям, а все недиагональные обратятся в нуль. Вращательная кинетическая энергия выразится поэтому через компоненты угловой скорости особенно просто. Обозначая через I_1, I_2, I_3 главные моменты инерции и через Ω_1, Ω_2, Ω_3 — компоненты угловой скорости по главным осям инерции твердого тела, получим вращательную кинетическую энергию в виде

$$T_{\text{вр}}=\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2) \tag{40,8}$$

и, соответственно этому,

$$L=\frac{\mu V^2}{2}+\frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2)-U. \tag{40,9}$$

При вычислении компонент тензора инерции мы вместо r_x, r_y, r_z для компонент вектора $\mathbf{r}$ можем писать просто x, y, z. В качестве примера рассмотрим I_{xx} и I_{yz}. Так как $\delta_{xx}=1$, то из (40,4) следует

$$\begin{aligned}I_{xx}&=\sum m(r_l^2\delta_{xx}-r_xr_x)=\\&=\sum m(x^2+y^2+z^2-x^2)=\sum m(y^2+z^2).\end{aligned}$$

Аналогично выглядят I_{yy} и I_{zz}. Иначе выглядят компоненты тензора инерции в случае разных значков. Замечая, что $\delta_{yz}=0$, найдем

$$I_{yz}=\sum m(r_l^2\delta_{yz}-r_yr_z)=\sum m(-yz)=-\sum myz.$$

Для наглядности приведем выражение тензора инерции и в виде таблицы

$$(I_{ik})=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum myx & \sum m(z^2+x^2) & -\sum myz\\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}. \tag{40,10}$$

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в (40,4) и (40,10) суммы заменяются интегралами. Так например вместо (40,4) для сплошного тела будем иметь

$$I_{ik}=\int(r_l^2\delta_{ik}-r_ir_k)\rho\,d\tau, \tag{40,11}$$

где ρ — плотность твердого тела, а $d\tau=dx\,dy\,dz$ — элемент объема. Интеграл берется по всему твердому телу.

Легко видеть, что каждый из главных моментов инерции не больше суммы двух других. Так, например,

$$I_1+I_2=\sum m(x^2+y^2+2z^2)\geqslant\sum m(x^2+y^2)=I_3.$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, т. е. $I_1\neq I_2\neq I_3$, называется *асимметрическим волчком.*

Если два главных момента инерции равны друг другу: $I_1=I_2\neq I_3$, то твердое тело называется *симметрическим волчком.* В этом случае выбор главных осей в плоскости x_1x_2 является произвольным (см. прил. § 7).

Если все три главные момента инерции равны друг другу, т. е. $I_1=I_2=I_3$, то тело именуется *шаровым волчком.* В этом случае совершенно произвольным является выбор всех трех главных осей инерции: всякие три взаимно перпендикулярных направления можно взять за главные оси инерции.

§ 41. Моменты инерции правильных тел

Если однородное твердое тело имеет какую-либо симметрию, то и тензор инерции и положение центра инерции должны обладать той же степенью симметрии. Так, если тело имеет центр симметрии, то, очевидно, центр инерции тела должен совпадать с центром симметрии. При наличии плоскости симметрии мы можем утверждать, что центр инерции лежит в этой плоскости. Оси инерции, как это явствует из соображений симметрии, могут быть расположены либо в плоскости симметрии, либо перпендикулярно этой плоскости. Отсюда следует, что одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие лежат в этой плоскости.

Если тело имеет ось симметрии, то центр инерции лежит на этой оси, а оси инерции из соображений симметрии могут быть направлены либо по оси, либо перпендикулярно к ней. Таким образом одна из осей совпадает с осью симметрии, а две другие ей перпендикулярны. Если ось симметрии выше 2-го порядка, то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось можно повернуть тогда на угол, отличный от 180°, т. е. выбор главных осей становится не однозначным, а это возможно только в случае симметрического волчка. В частности таким волчком является всякое тело вращения, так как оно имеет ось ∞-го порядка.

При наличии нескольких элементов симметрии нахождение главных осей инерции особенно упрощается, так как можно пользоваться следствиями, вытекающими из наличия каждого элемента симметрии в отдельности.

В случае, когда все точки твердого тела лежат в одной плоскости, эта плоскость является, очевидно, плоскостью симметрии. Поэтому одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости тела, а две другие оси лежат в ней. Пусть перпендикулярная плоскости ось, есть ось z. Так как в этом случае для всех точек тела $z=0$, то

$$I_1=\sum my^2;\quad I_2=\sum mx^2;\quad I_3=\sum m(x^2+y^2).$$

Отсюда видно, что между главными моментами инерции плоского тела имеет место соотношение

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Если все точки твердого тела расположены по одной прямой линии, то эта линия является осью симметрии и притом бесконечного порядка. Поэтому одна из осей инерции направлена по этой прямой, а выбор двух других осей, перпендикулярных телу, является произвольным. Направим по линии тела ось z. Тогда для всех точек тела $x = y = 0$. Поэтому в случае линейного твердого тела

$$I_1 = I_2 = \sum mz^2, \quad I_3 = 0.$$

Если твердое тело состоит только из двух материальных точек (например, двухатомная молекула) с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии a друг от друга, то, выражая при помощи равенств

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = 0, \quad z_1 - z_2 = a,$$

z_1 и z_2 через a, найдем

$$I_1 = \sum mz^2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2,$$

т. е. главные моменты инерции I_1 и I_2 в этом случае равны произведению приведенной массы системы на квадрат расстояния между точками. Этого, конечно, и следовало ожидать на основании результатов § 7.

Задачи

1. а, б, в, г, д — определить главные моменты инерции для систем точек, изображенных на рис. 33—37.

а) *Отв.* $I_x = I_y = 6$.

б) Решение. Выбираем основание треугольника (рис. 34) за ось x, высоту его — за ось y. Тогда координаты точек будут

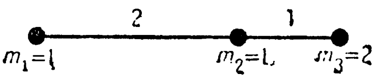


Рис. 33.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1,$$
$$y_1 = 3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Координаты центра инерции $x = 0$, $y = 1$. Координаты относительно центра инерции

$$x_1' = x - x_1 = 0, \quad x_2' = -1, \quad x_3' = -1,$$
$$y_1' = 2, \quad y_2' = -1, \quad y_3' = -1.$$

Моменты инерции

$$I_x = 6, \quad I_y = 2, \quad I_z = 8.$$

в) Решение. Основание треугольника (рис. 35) принимаем за ось x-в, а второй катет за ось y-в; тогда координаты точек

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Координаты центра инерции $x = \frac{1}{6}$, $y = 1$.

Координаты относительно центра инерции

$$x_1' = -\frac{1}{6}, \quad x_2' = -\frac{1}{6}, \quad x_3' = \frac{5}{6},$$
$$y_1' = 1, \quad y_2' = -1, \quad y_3' = -1.$$

Компоненты тензора инерции, отличные от нуля,

$$I_{xx}=6,\quad I_{yy}=\frac{5}{6},\quad I_{zz}=\frac{41}{6},\quad I_{xy}=I_{yx}=1.$$

Главные моменты инерции I_x, I_y, I_z являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{6}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{41}{6}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда

$$I_x=\frac{41}{6},\quad I_y=\frac{41+\sqrt{1105}}{12},$$

$$I_z=\frac{41-\sqrt{1105}}{12}.$$

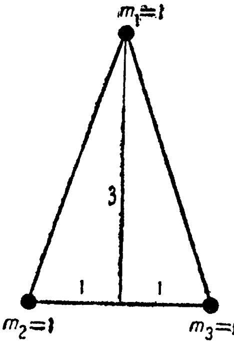


Рис. 34.

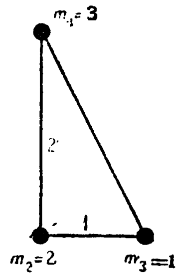


Рис. 35.

г) Решение. Выбираем ось y параллельно высоте, ось x — параллельно основанию треугольника (рис. 36), начало координат — в центре инерции. Главные моменты инерции

$$I_x=\frac{59}{6},\quad I_y=\frac{59+\sqrt{1433}}{32},\quad I_z=\frac{59-\sqrt{1433}}{32}.$$

д) Решение. Выбираем плоскость xy параллельно основанию пирамиды (рис. 37), оси x и y — параллельно сторонам основания, ось z — по высоте пирамиды:

$$I_x=I_y=\frac{19}{3},\quad I_z=2.$$

2. Определить главные моменты инерции следующих сплошных однородных тел:

а) шара радиуса R.

Решение. На основании (40,11)

$$I_x=\int(y^2+z^2)\rho\,dV,\quad I_y=\int(x^2+z^2)\rho\,dV,\quad I_z=\int(x^2+y^2)\rho\,dV.$$

Складывая, находим

$$I_x+I_y+I_z=2\int r^2\rho\,dV=2\rho\int r^2 4\pi r^2\,dr=\frac{8\pi}{5}\rho R^5.$$

В силу шаровой симметрии $I_x=I_y=I_z$. Поэтому

$$I_x=I_y=I_z=\frac{8\pi}{15}\rho R^5.$$

Вводя массу шара $M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, находим

$$I_x=I_y=I_z=\frac{2}{5}MR^2.$$

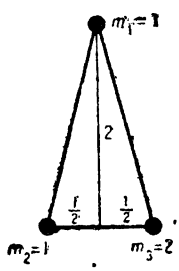


Рис. 36.

б) Круглого цилиндра радиуса R и высоты $2l$.

Отв.: $I_x=I_y=M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right)$, $I_z=\frac{1}{2}MR^2$.

в) Прямоугольного параллелепипеда размеров a, b, c.

Решение.

$$\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} x^2\,dx\,dy\,dz=\frac{a^3bc}{3}.$$

Поэтому

$$I_x=\frac{1}{3}\,abc\,(b^2+c^2)\,\rho=\frac{M}{3}\,(b^2+c^2),$$

$$I_y=\frac{1}{3}\,abc\,(c^2+a^2)\,\rho=\frac{M}{3}\,(c^2+a^2),$$

$$I_z=\frac{1}{3}\,abc\,(a^2+b^2)\,\rho=\frac{M}{3}\,(a^2+b^2).$$

3. а) Определить частоту малых колебаний физического маятника по массе M, главным моментам инерции I_1, I_2, I_3, углам α, β, γ главных осей инерции с осью вращения и расстоянию l по оси вращения до центра инерции.

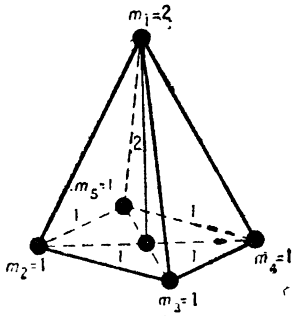


Рис. 37.

Решение. Вводим φ — угол между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось вращения. Скорость центра инерции $V=l\dot{\varphi}$. Проекции угловой скорости на главные оси инерции: $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. Считая угол φ малым, находим потенциальную энергию в виде

$$U=mgl(1-\cos\varphi)\approx\frac{Mgl\varphi^2}{2}.$$

Поэтому функция Лагранжа

$$L=\frac{Ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+\frac{I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}{2}\dot{\varphi}^2-\frac{Mgl^2}{2}\varphi^2.$$

Отсюда частота колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{Mgl}{Ml^2+I_1\cos^2\alpha+I_2\cos^2\beta+I_3\cos^2\gamma}}.$$

б) Найти кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 38. OA и OB — однородные стержни с длиной l, массой M и моментом инерции I; стержень OA вращается вокруг точки O, а стержень OB двигается так, что конец B остается все время на одной прямой (движение в плоскости рисунка).

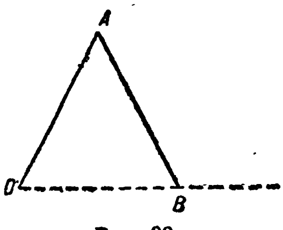


Рис. 38.

Решение. Угол AOB обозначим через φ. Скорость центра инерции стержня OA (находящегося на его середине) есть $\frac{1}{2}l\dot{\varphi}$. Поэтому кинетическая энергия этого стержня

$$T_1=\frac{Ml^2}{8}\dot{\varphi}^2+\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Если ввести декартовы координаты с осью x по OB и осью y, перпендикулярной к ней, с началом в точке O, то координаты центра инерции второго стержня будут $x=\frac{3l}{2}\cos\varphi$, $y=\frac{l}{2}\sin\varphi$. Так как угловая скорость вращения этого стержня также равна $\dot\varphi$, то кинетическая энергия будет

$$T_2=\frac{M}{2}(\dot x^2+\dot y^2)+\frac{I\dot\varphi^2}{2}=\frac{Ml^2}{8}(1+8\sin^2\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I\dot\varphi^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия

$$T=T_1+T_2=\frac{Ml^2}{4}(1+4\sin^2\varphi)\dot\varphi^2+I\dot\varphi^2.$$

в) Найти кинетическую энергию цилиндра (радиуса r), катящегося по плоскости. Масса и моменты инерции цилиндра известны, а главная ось параллельна оси цилиндра; центр инерции находится на расстоянии a от оси цилиндра (рис. 39).

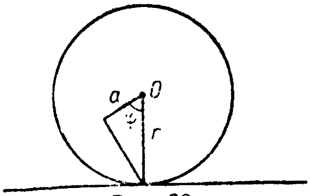


Рис. 39.

Решение. Угол поворота цилиндра вокруг оси обозначим через φ. Угловая скорость вращения твердого тела вокруг всех параллельных осей одинакова. Мгновенной осью вращения называется ось, вокруг которой твердое тело вращается в данный момент времени. В данном случае мгновенной осью вращения является линия соприкосновения цилиндра с плоскостью. Центр инерции находится на расстоянии $\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}$ от мгновенной оси. Поэтому скорость центра инерции есть $\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi}\,\dot\varphi$. Пусть I — момент инерции относительно оси цилиндра. Так как главная ось инерции параллельна оси цилиндра и угловая скорость вращения параллельна ей же, то

$$T=\frac{M}{2}(a^2+r^2-2ar\cos\varphi)\dot\varphi^2+\frac{I}{2}\dot\varphi^2.$$

г) Найти кинетическую энергию при тех же условиях, если цилиндр катится по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R; центр инерции цилиндра находится на его оси (рис. 40).

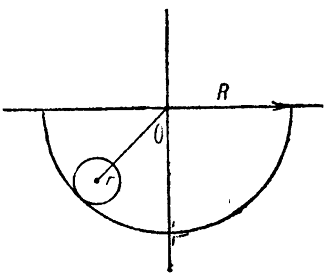


Рис. 40.

Решение. Угол между линией, соединяющей центры обоих цилиндров, и вертикалью обозначим через θ. Скорость центра инерции катящегося цилиндра есть $\dot\theta(R-r)$ (рис. 40). Угловая скорость его вращения при качении (вокруг мгновенной оси вращения, т. е. линии соприкосновения цилиндров) есть $\frac{\dot\theta(R-r)}{r}$. Если I — момент инерции относительно оси цилиндра, то

$$T=\frac{M(R-r)^2\dot\theta^2}{2}+\frac{I}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot\theta^2.$$

д) Найти кинетическую энергию конуса с углом 2α при вершине, катящегося по плоскости. Центр инерции конуса находится на его оси на расстоянии a от вершины (рис. 41).

Решение. Угол между осью y и линией OA соприкосновения конуса с плоскостью (она же мгновенная ось вращения) обозначим через θ (рис. 41). Скорость центра инерции будет тогда $V=a\cos\alpha\dot\theta$, а угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси OA

$$\Omega=\frac{V}{a\sin\alpha}=\dot\theta\operatorname{ctg}\alpha.$$

Одной из главных осей инерции конуса является его ось, а две другие оси инерции лежат в перпендикулярной плоскости. Одну из этих осей выбираем перпендикулярно оси конуса и линии OA. Тогда проекции угловой скорости вращения на главные оси будут $\dot\theta \operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$, $\dot\theta\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha$, 0. Обозначив через I_1 и I_2 моменты инерции конуса по оси конуса и по оси ей перпендикулярной, получим

$$T=\frac{M}{2}a^2\cos^2\alpha\dot\theta^2+\frac{I_1}{2}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot\theta^2+\frac{I_2}{2}\cos^2\alpha\dot\theta^2.$$

е) Найти кинетическую энергию конуса, катящегося по плоскости, причем его вершина находится в точке над плоскостью на высоте r, так, что ось конуса параллельна плоскости; центр инерции находится на расстоянии a от вершины конуса на его оси; угол при вершине конуса равен 2α (рис. 42).

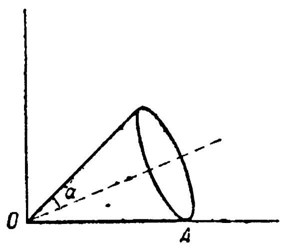


Рис. 41.

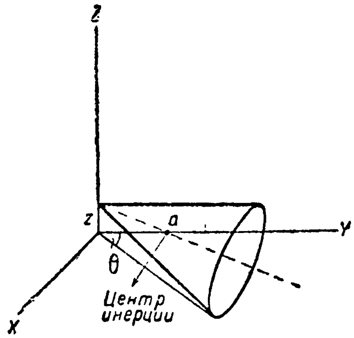


Рис. 42.

Решение. Вводим угол θ между осью y и проекцией оси конуса на плоскость xy (рис. 42). Тогда скорость центра инерции будет $V=a\dot\theta$ Угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси (которой является образующая конуса, проведенная через точку соприкосновения с плоскостью) равна скорости центра инерции, разделенной на его расстояние до оси вращения, т. е. $\Omega=\dfrac{V}{a\sin\alpha}=\dfrac{\dot\theta}{\sin\alpha}$. Осями инерции являются ось конуса и ось, перпендикулярная ей, — например, ось перпендикулярная оси конуса и оси вращения. Проекции угловой скорости на оси инерции равны, соответственно, $\dot\theta\operatorname{ctg}\alpha$ и $\dot\theta$. Обозначим через I_1 и I_2 моменты инерции конуса. Тогда

$$T=\frac{Ma^2\dot\theta^2}{2}+\frac{I_1\dot\theta^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}+\frac{I_2\dot\theta^2}{2}.$$

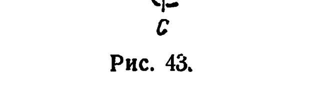


Рис. 43.

ж) Найти кинетическую энергию трехосного эллипсоида, вращающегося вокруг одной из своих осей (рис. 43), причем последняя также вращается вокруг направления, ей перпендикулярного (CD) и проходящего через центр эллипсоида.

Решение. Главные оси инерции в силу симметрии совпадают с осями эллипсоида, а центр инерции — с его центром. Угол поворота вокруг оси CD обозначим через θ, а угол поворота вокруг оси AB (угол между CD и одной из осей инерции, перпендикулярных AB) — через φ. Тогда проекции угловых скоростей $\dot\theta$ и $\dot\varphi$ на оси инерции (оси эллипсоида) будут: $\dot\varphi$ — на ось AB и

$\dot{\theta}\cos\varphi$ и $\dot{\theta}\sin\varphi$ — на оси, перпендикулярные AB. Обозначив моменты инерции по этим осям через I_1, I_2, I_3, получим

$$T=\frac{I_1\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{I_2\cos^2\varphi+I_3\sin^2\varphi}{2}\dot{\theta}^2.$$

з) Найти кинетическую энергию при тех же условиях, если ось AB (задача 3 ж)) наклонена (рис. 44), а эллипсоид симметричен.

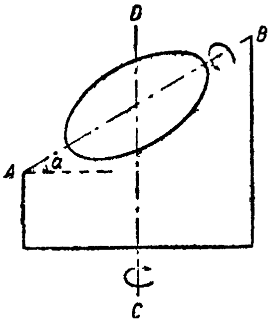


Рис. 44.

Решение. Обозначения те же, что и в задача 3. Проекции угловых скоростей: на ось AB $\dot{\varphi}+\dot{\theta}\sin\alpha$ и на две другие главные оси инерции: $\dot{\theta}\cos\alpha\cos\varphi$ и $\dot{\theta}\cos\alpha\sin\varphi$. Кинетическая энергия

$$T=\frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}+\sin\alpha\dot{\theta})^2+\frac{I_2}{2}\cos^2\alpha\dot{\theta}^2.$$

§ 42. Угловая скорость в эйлеровых углах

Как уже было указано выше, для конкретного описания движения твердого тела можно пользоваться тремя координатами X, Y, Z центра инерции твердого тела и какими-либо тремя углами, которые определяли бы ориентировку осей движущейся системы координат относительно неподвижной. В качестве таких углов удобны так называемые эйлеровы углы.

Пусть X, Y, Z — неподвижная система координат, а x_1, x_2, x_3 — подвижная система, связанная с движущимся телом. Так как нас сейчас интересуют только углы между осями координат, мы начала обеих систем координат выбираем в одной точке (рис. 45). Подвижная плоскость x_1x_2 будет пересекаться с неподвижной XY по некоторой прямой ON. Эта линия носит название *линии узлов*, данное ей в астрономии. Линия узлов, очевидно, перпендикулярна и к оси Z и к оси x_3, так как лежит в плоскостях, перпендикулярных к этим осям. Положительное направление ON выберем так, чтобы поворот оси Z к оси x_3 вокруг линии узлов на наименьший угол происходил по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси ON. Прямую, перпендикулярную к ON и лежащую в плоскости x_1x_2, мы обозначим через OL.

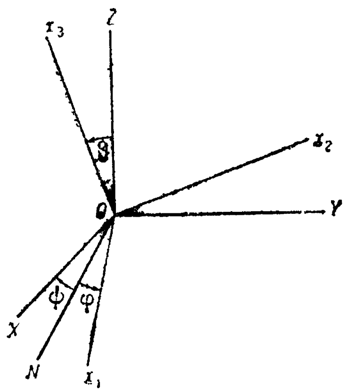


Рис. 45.

В качестве величин, определяющих положение осей x_1, x_2, x_3 относительно осей X, Y, Z, мы примем следующие углы: угол ϑ между осями z и x_3 (этот угол в астрономии называют *углом нутации*), угол ψ между осями X и N (*угол прецессии*) и угол φ между осями N и x_1 (*угол чистого вращения*). Все три угла отсчитываются по часовой стрелке вокруг положительного направления соответствующей оси.

Из самого способа определения эйлеровых углов следует, что если заданы направления осей неподвижной и подвижной систем координат, то тем самым углы Эйлера будут однозначно определены, причем эти углы изменяются в пределах:

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Выразим теперь компоненты угловой скорости Ω относительно подвижных осей x_1, x_2, x_3 через эйлеровы углы и их производные. Представим для этого вектор Ω в виде суммы трех угловых скоростей $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$. При этом, однако, нужно помнить, что угловые скорости откладываются всегда по оси, перпендикулярной к плоскости угла поворота и притом по правилу правого винта.

Угловая скорость $\dot{\vartheta}$ направлена по оси узлов ON и ее составляющие по осям x_1, x_2, x_3 равны, соответственно,

$$\dot{\vartheta}_1 = \dot{\vartheta}\cos\varphi, \quad \dot{\vartheta}_2 = -\dot{\vartheta}\sin\varphi, \quad \dot{\vartheta}_3 = 0.$$

Угловая скорость $\dot{\psi}$ имеет направление по оси OZ. Мы разложим ее сперва по двум взаимно перпендикулярным направлениям Ox_3 и OL:

$$\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}\cos\vartheta, \quad \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}\sin\vartheta,$$

а затем вторую составляющую опять разложим на две — по Ox_1 и Ox_2:

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi; \quad \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi.$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ направлена по оси Ox_3.

Собирая все составляющие по отдельным осям x_1, x_2, x_3 и приравнивая полученные суммы компонентам Ω_1, Ω_2, Ω_3, получим

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi, \\ \Omega_2 &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi, \\ \Omega_3 &= \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{42,1}$$

Чтобы выразить кинетическую энергию твердого тела через углы Эйлера, достаточно в выражениях (40,8) или (40,9) для кинетической энергии заменить проекции Ω_1, Ω_2, Ω_3 по формулам (42,1).

Рассмотрим симметрический волчок, два главных момента инерции которого равны друг другу. Вводя обозначения

$$I_1 = I_2 = A, \quad I_3 = B, \tag{42,2}$$

получим для вращательной кинетической энергии симметрического волчка

$$T_{\text{вр}} = \frac{A}{2}(\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{B}{2}(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi})^2. \tag{42,3}$$

Это же выражение мы можем получить и следующим образом. Так как два главных момента инерции I_1 и I_2 равны друг другу (тело симметрично относительно оси x_3 и выбор оси x_1 становится безразличным), то мы можем в данный момент времени считать, что ось x_1 совпадает с осью узлов ON, иначе говоря, $\varphi = 0$ постоянно. Тогда выражения (42,1) для компонент угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на подвижные оси упрощаются:

$$\Omega_1 = \dot{\vartheta}, \quad \Omega_2 = \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad \Omega_3 = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \tag{42,4}$$

Подставляя эти выражения в (40,9), получим снова формулу (42,3).

У шарового волчка все три момента инерции твердого тела равны друг другу, т. е. $I_1 = I_2 = I_3 = A$ и

$$T_{\text{вр}} = \frac{A}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\vartheta). \tag{42,5}$$

§ 43. Момент твердого тела

Рассмотрим импульс и момент твердого тела. Как было выяснено выше (§ 12), величина момента зависит от выбора начала координат. Нас будет интересовать здесь, главным образом, момент твердого тела относительно центра инерции.

Обозначим через $\mathbf{p}$ импульсы материальных точек, составляющих твердое тело, через $\mathbf{P}$ — его импульс и через $\mathfrak{M}$ — момент относительно центра инерции. Тогда

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}, \quad \mathfrak{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{43,1}$$

Общий момент $\mathbf{M}$ твердого тела относительно неподвижной системы координат складывается [см. (12,5)] из момента центра инерции и момента твердого тела относительно центра инерции

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathfrak{M}. \tag{43,2}$$

Выразим импульс $\mathbf{P}$ и момент $\mathfrak{M}$ твердого тела через скорость $\mathbf{V}$ поступательного движения и угловую скорость $\mathbf{\Omega}$. Для импульса получим согласно (9,1)

$$\mathbf{P} = \mu \mathbf{V}. \tag{43,3}$$

Для момента $\mathfrak{M}$ имеем

$$\mathfrak{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \sum m\mathbf{r} \times (\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) =$$
$$= \sum m\mathbf{r} \times \mathbf{V} + \sum m\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Первая сумма равна нулю, так как

$$\sum m\mathbf{r} \times \mathbf{V} = (\sum m\mathbf{r}) \times \mathbf{V} = 0.$$

Во второй сумме раскроем векторное произведение. Тогда

$$\mathfrak{M} = \sum m\mathbf{r} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum m \{r^2 \mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}\},$$

или, в компонентах

$$\mathfrak{M}_i = \sum m \{r_l^2 \Omega_i - \Omega_k r_k r_i\} = \Omega_k \sum m (r_l^2 \delta_{ik} - r_i r_k).$$

Воспользовавшись определением тензора инерции, получим

$$\mathfrak{M}_i = I_{ik}\Omega_k. \tag{43,4}$$

Если подвижные оси направлены по главным осям инерции твердого тела, эта формула дает

$$\mathfrak{M}_1 = I_1\Omega_1, \quad \mathfrak{M}_2 = I_2\Omega_2, \quad \mathfrak{M}_3 = I_3\Omega_3. \tag{43,5}$$

Из последних формул видно, между прочим, что момент $\mathfrak{M}$, вообще говоря, не совпадает по своему направлению с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ и только при вращении тела вокруг одной из его главных осей инерции оба вектора $\mathfrak{M}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ имеют одинаковое направление. Исключение составляет шаровой волчок, когда просто

$$\mathfrak{M} = I\boldsymbol{\Omega}. \tag{43,6}$$

§ 44. Свободное движение симметрического волчка

В качестве примера применения эйлеровых углов, рассмотрим свободное движение симметрического волчка. При этом нет необходимости составлять и интегрировать соответствующие уравнения движения. Вместо этого можно воспользоваться тем, что при свободном движении момент волчка сохраняется. В частности, в рассматриваемом случае свободного движения момент будет сохраняться и в той системе координат, в которой центр инерции покоится, так как эта система также является инерциальной системой координат. Таким образом мы будем исходить из равенства

$$\mathfrak{M} = \mathrm{const}. \tag{44,1}$$

Выберем ось z неподвижной системы координат в направлении момента $\mathfrak{M}$. Оси вращающейся системы координат направим по главным осям инерции волчка, причем ось x_1 пусть в данный момент совпадает с осью узлов. Такой выбор оси x_1 возможен, так как волчок мы предполагаем симметричным.

Проецируя вектор $\mathfrak{M}$ на подвижные оси и, принимая во внимание, что ось x_1 перпендикулярна оси z, получим

$$\mathfrak{M}_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}\sin\vartheta, \quad \mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}\cos\vartheta. \tag{44,2}$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{M}_1 = I_1\Omega_1 = A\Omega_1, \quad \mathfrak{M}_2 = I_2\Omega_2 = A\Omega_2, \quad \mathfrak{M}_3 = I_3\Omega_3 = C\Omega_3,$$

или, выражая Ω_1, Ω_2 и Ω_3 через эйлеровы углы (42,1),

$$\mathfrak{M}_1 = A\dot{\vartheta}, \quad \mathfrak{M}_2 = A\dot{\psi}\sin\vartheta, \quad \mathfrak{M}_3 = C(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}). \tag{44,3}$$

Приравнивая правые части равенств (44,2) и (44,3), получим следующие уравнения движения симметрического волчка в эйлеровых координатах:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\vartheta} &= 0, \\ A\dot{\psi}\sin\vartheta &= \mathfrak{M}\sin\vartheta, \\ C(\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}) &= \mathfrak{M}\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{44,4}$$

Эти уравнения легко интегрируются. Из первого уравнения ясно, что угол ϑ при движении остается постоянным, т. е.

$$\vartheta = \vartheta_0;$$

из второго уравнения определим $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{\mathfrak{M}}{A}. \tag{44,5}$$

Поставив это в третье уравнение, найдем и $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{A-C}{AC}\mathfrak{M}\cos\vartheta_0. \tag{44,6}$$

Проинтегрировав (44,5) и (44,6), получим выражения для всех трех углов Эйлера как функций от времени

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0, \\ \psi &= \frac{\mathfrak{M}}{A}t + \psi_0, \\ \varphi &= \frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\mathfrak{M}t + \varphi_0, \end{aligned}\right\} \tag{44,7}$$

где ψ_0 и φ_0 — начальные значения углов ψ и φ в момент времени $t = 0$.

Первое уравнение показывает, что угол между осью симметрии волчка и направлением момента $\mathfrak{M}$ остается постоянным. Из второго уравнения мы заключаем, что ось симметрии описывает круговой конус, равномерно вращаясь вокруг постоянного направления момента $\mathfrak{M}$ с угловой скоростью $\mathfrak{M}/A$. Наконец, из третьего уравнения видно, что само тело при этом равномерно вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\mathfrak{M}$.

Рассмотренное движение волчка носит название *регулярной прецессии.*

В случае шарового волчка, когда $A = C$, угол φ не изменяется. Это означает, что шаровой волчок прецессируя, сам не вращается. Таким образом наиболее общим свободным движением шарового волчка является равномерное вращение его вокруг постоянной оси.

§ 45. Уравнения движения твердого тела

При составлении уравнений движения твердого тела мы будем основываться на уравнениях, описывающих движение каждой отдельной материальной точки, принадлежащей этому телу. Импульс одной из точек твердого тела обозначим через $\mathbf{p}$. Силу, действующую на нее, мы разложим на две: силу $\mathbf{f}_{вз}$, обусловленную взаимодействием со всеми остальными точками твердого тела, и силу $\mathbf{f}$, обусловленную внешним полем. Тогда уравнение Лагранжа для рассматриваемой точки будет

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}_{вз} + \mathbf{f}. \tag{45,1}$$

Такое же уравнение можно написать и для всякой другой точки твердого тела. Складывая все эти уравнения и, приняв во внимание, что импульс $\mathbf{P}$ твердого тела равен сумме импульсов всех материальных точек тела, получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\sum \mathbf{f}_{\text{вз}}+\sum \mathbf{f}.$$

Первая сумма, представляющая собой равнодействующую всех внутренних сил тела, равна нулю. Действительно, при отсутствии внешних сил импульс твердого тела, как и всякой замкнутой системы, должен сохраняться, а это возможно только в том случае, если $\sum \mathbf{f}_{\text{вз}}=0$.

Таким образом, производная от импульса твердого тела равна сумме всех действующих на него внешних сил:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\sum \mathbf{f}. \tag{45,2}$$

Рассмотрим теперь закон изменения момента твердого тела. Относительно неподвижной системы координат момент $\mathbf{M}$ есть $\mathbf{M}=\sum [\mathbf{r}\mathbf{p}]$. Продиференцировав это равенство по времени и приняв во внимание, что скорость точки $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и ее импульс $\mathbf{p}$ имеют одно и то же направление, получим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\sum \mathbf{v}\times\mathbf{p}+\sum \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}=\sum \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}},$$

или, выражая производную от импульса через силы, согласно уравнениям Лагранжа (45,1)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}_{\text{вз}}+\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}.$$

При отсутствии внешних сил момент $\mathbf{M}$ твердого тела сохраняется. Отсюда следует, что первая сумма, сумма моментов всех внутренних сил, равна нулю и мы имеем *закон моментов*:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}, \tag{45,3}$$

т. е. производная от момента твердого тела относительно неподвижной системы координат равна сумме моментов всех внешних сил, приложенных к телу, относительно начала этой системы координат.

Найдем теперь закон изменения момента $\mathfrak{M}$ твердого тела относительно центра инерции. Обозначив через $\mathbf{R}$ радиус-вектор центра инерции, имеем на основании предыдущего

$$\mathbf{M}=\mathbf{R}\times\mathbf{P}+\mathfrak{M}.$$

При диференцировании этого выражения по времени заметим, что $\dot{\mathbf{R}}\times\mathbf{P}=0$, так как направление скорости центра инерции совпадает с направлением импульса твердого тела (43,3). Поэтому

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{P}}+\frac{d\mathfrak{M}}{dt}.$$

Отсюда определяем $\mathfrak{M}$. Заменяя $\dot{\mathbf{P}}$ и $\dot{\mathbf{M}}$ согласно уравнениям импульса и моментов (45,2) и (45,3), получим

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\frac{d\mathbf{M}}{dt}-\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{P}}=\sum \mathfrak{r}\times\mathbf{f}-\mathbf{R}\times\sum\mathbf{f}.$$

Выносся знак суммы за знак векторного произведения, имеем

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\sum \mathfrak{r}\times\mathbf{f}-\sum\mathbf{R}\times\mathbf{f},$$

или, так как $\mathfrak{r}-\mathbf{R}=\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ есть, попрежнему, расстояние точки твердого тела от центра инерции

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\sum \mathbf{r}\times\mathbf{f}. \tag{45,4}$$

Сравнивая это уравнение с (45,3), мы видим, что, применяя закон моментов, мы можем считать центр, относительно которого берутся моменты, либо неподвижным, либо совпадающим с центром инерции тела.

Уравнения импульсов и моментов (45,2) и (45,4) показывают, что влияние внешнего поля на твердое тело характеризуется двумя векторами: вектором общей силы и вектором общего момента сил.

Вводя обозначения

$$\sum\mathbf{f}=\mathbf{F},\quad \sum\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\mathbf{K}, \tag{45,5}$$

мы получим уравнения движения твердого тела в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\mathbf{F},\quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\mathbf{K}. \tag{45,6}$$

Оба эти уравнения дают шесть уравнений в компонентах, три — для поступательной скорости движения центра инерции и три — для вращательной скорости твердого тела. Это вполне соответствует шести степеням свободы твердого тела.

При переносе начала координат на некоторый отрезок $\mathbf{a}$, вектор общей силы $\mathbf{F}$, очевидно, не изменяется. Вектор общего момента сил $\mathbf{K}$, однако, будет уже другой. Если мы через $\mathbf{r}'$ обозначим расстояние точки твердого тела от нового начала, то $\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{a}$. Поэтому

$$\mathbf{K}=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\sum(\mathbf{r}'+\mathbf{a})\times\mathbf{f}=\sum\mathbf{r}'\times\mathbf{f}+\sum\mathbf{a}\times\mathbf{f},$$

или, если знак суммы ввести под знак векторного произведения,

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}'+\mathbf{a}\times\mathbf{F}. \tag{45,7}$$

Из полученного соотношения мы видим, между прочим, что если общая сила равна нулю, то величина общего момента сил не зависит от выбора начала координат.

Уравнения движения твердого тела можно получить и непосредственно, составляя уравнения Лагранжа для твердого тела. Для этого заметим, что бесконечно малому переносу $\delta\mathbf{R}$ и бесконечно малому повороту $\delta\boldsymbol{\varphi}$ соответствуют скорости $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\Omega}$. Поэтому уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{V}}=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{R}},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\Omega}}=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\varphi}}. \tag{45,8}$$

Кинетическая энергия не зависит от координат, а $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}}$ и $\frac{\partial L}{\partial \Omega}$, как легко видеть из (40,7), равны импульсу $\mathbf{P}$ и моменту $\mathfrak{M}$ твердого тела, соответственно. Поэтому мы имеем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{45,9}$$

С другой стороны, согласно определению силы,

$$\delta U=\sum \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{r}}\cdot\delta\mathfrak{r}=-\sum \mathfrak{f}\cdot\delta\mathfrak{r},$$

или, подставляя $\delta\mathfrak{r}=\delta\mathbf{R}+\delta\varphi\times\mathbf{r}$ и, вынося за знак суммы величины, одинаковые для всех точек тела,

$$\delta U=-\sum \mathfrak{f}\,(\delta\mathbf{R}+\delta\varphi\times\mathbf{r})=-(\sum\mathfrak{f})\cdot\delta\mathbf{R}-(\sum\mathbf{r}\times\mathfrak{f})\cdot\delta\varphi.$$

Вводя снова обозначения (45,5) для общей силы и общего момента сил, получаем

$$\delta U=-\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{R}-\mathbf{K}\cdot\delta\varphi, \tag{45,10}$$

откуда

$$\mathbf{F}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \quad \text{и} \quad \mathbf{K}=-\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{45,11}$$

Сопоставляя полученные соотношения (45,11) с (45,9), мы снова приходим к уравнениям импульсов и моментов.

При обращении с вектором бесконечно малого поворота $\delta\varphi$ следует соблюдать известную осторожность, так как его нельзя рассматривать как диференциал некоторого вектора, определяющего положение тела по отношению к „начальному" положению $\varphi=0$. Интеграл $\int d\varphi$ зависит, вообще говоря, не только от начального и конечного положения тела, но и от промежуточных положений (т. е. от „пути перехода"). По этой причине, не существующий сам по себе вектор φ называют псевдо-координатой.

§ 46. Твердое тело в однородном поле

Выражения для общей силы и общего момента сил значительно упрощаются, если движение твердого тела происходит в однородном силовом поле. В самом деле, в этом случае сила, действующая на материальную точку, пропорциональна напряженности внешнего поля $\mathbf{E}$, которая имеет в каждой точке пространства одно и то же значение, т. е.

$$\mathfrak{f}=e\mathbf{E}. \tag{46,1}$$

Величина e характеризует свойства материальных точек в отношении их движения в данном силовом поле. Определим общую силу. Вынося вектор $\mathbf{E}$ за знак суммы, имеем:

$$\mathbf{F}=\sum\mathfrak{f}=\sum e\mathbf{E}=\mathbf{E}\sum e$$

(суммирование производится по всем частицам). Вводя обозначение

$$\sum e = \varepsilon, \tag{46,2}$$

получим

$$\mathbf{F} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{46,3}$$

При вычислении общего момента сил, мы можем знак суммирования внести под знак векторного произведения

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \sum e\mathbf{r} \times \mathbf{E} = \left(\sum e\mathbf{r}\right) \times \mathbf{E}.$$

Умножив и разделив на $\sum e$, получаем

$$\mathbf{K} = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e} \times \left(\sum e\right) \mathbf{E}. \tag{46,4}$$

Если мы теперь введем радиус-вектор

$$\mathbf{R} = \frac{\sum e\mathbf{r}}{\sum e} \tag{46,5}$$

и заметим, что $\sum e = \varepsilon$, то из (46,4) получим следующее простое выражение для общего момента сил

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}. \tag{46,6}$$

Таким образом, мы видим, что при движении твердого тела в однородном поле влияние поля на тело сводится к одной силе. Точка приложения этой силы определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}$ согласно формуле (46,5). В случае гравитационного поля сила очевидно приложена в центре инерции.

Если, в частности, $\varepsilon = \sum e = 0$, то общая сила $\mathbf{F}$ равна нулю. Это видно из (46,3). Общий момент при этом может быть отличен от нуля, но формула (46,6) уже не применима. В этом случае иногда говорят о *паре сил*.

В случае движения твердого тела в произвольном внешнем поле, все силы, действующие на отдельные точки тела, нельзя свести к одной силе. В самом деле, если бы это было возможно, то из соотношения $\mathbf{K} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, где $\mathbf{R}$ определяет точку приложения силы $\mathbf{F}$, следовало бы, что общая сила $\mathbf{F} = \sum \mathbf{f}$ перпендикулярна к общему моменту сил $\mathbf{K} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, чего, конечно, в общем случае утверждать нельзя.

§ 47. Уравнения Эйлера

Наиболее простая связь между компонентами момента твердого тела и компонентами угловой скорости имеет место в подвижной системе координат, начало которой находится в центре инерции, а оси направлены по главным осям инерции. Однако полученные нами выше уравнения движения относятся к неподвижной системе. Поэтому для того, чтобы воспользоваться подвижной системой координат мы должны найти связь между изменением некоторого вектора по отношению к неподвижной системе координат x, y, z и его изменением по отношению к подвижной системе x_1, x_2, x_3.

Пусть $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ — скорость изменения вектора $\mathbf{A}$ по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор $\mathbf{A}$ не изменяется, то изменение его относительно неподвижной системы обусловлено только вращением и, как уже было выяснено в § 12,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}. \tag{47,1}$$

В общем случае, когда вектор $\mathbf{A}$ изменяется по отношению к подвижной системе, к правой части этого равенства следует добавить скорость изменения вектора $\mathbf{A}$ по отношению к самому вращающемуся твердому телу; эту скорость мы обозначим через $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$. Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}. \tag{47,2}$$

Это и есть нужное нам соотношение между производной по времени от некоторого вектора, взятой в одной системе координат, и производной того же вектора в другой системе, вращающейся по отношению к первой с определенной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Уравнения импульсов и моментов

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \mathbf{K}, \tag{47,3}$$

мы можем теперь написать в виде

$$\frac{d'\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{P} = \mathbf{F}, \quad \frac{d'\mathfrak{M}}{dt} + \mathbf{\Omega} \times \mathfrak{M} = \mathbf{K} \tag{47,3'}$$

Здесь, $\frac{d'}{dt}$ как и в (31,2), означает производную по отношению к подвижной системе координат. Поэтому, обозначив индексами 1, 2, 3 компоненты по подвижным осям, имеем

$$\left(\frac{d'\mathbf{P}}{dt}\right)_1 = \frac{dP_1}{dt}, \ \ldots, \quad \left(\frac{d'\mathfrak{M}}{dt}\right)_1 = \frac{d\mathfrak{M}_1}{dt} \ldots$$

Вводя проекцию скорости центра инерции на подвижные оси, мы можем P_1, P_2 и P_3 заменить на μV_1, μV_2 и μV_3. Первое из уравнений (47,3′) — уравнение импульсов — приводит тогда к следующим трем уравнениям в компонентах:

$$\left.\begin{aligned} \mu\left[\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right] &= F_1, \\ \mu\left[\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right] &= F_2, \\ \mu\left[\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right] &= F_3, \end{aligned}\right\} \tag{47,4}$$

где F_1, F_2, F_3 — компоненты общей силы по главным осям инерции.

Аналогично получаются уравнения для компонент угловой скорости. Воспользовавшись соотношениями $\mathfrak{M}_1 = I_1\Omega_1$, $\mathfrak{M}_2 = I_2\Omega_2$, $\mathfrak{M}_3 = I_3\Omega_3$, мы из уравнения моментов (47,3′) получаем

$$\left.\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 &= K_3, \end{aligned}\right\} \tag{47,5}$$

где K_1, K_2, K_3 — компоненты общего момента сил по главным осям инерции.

Уравнения (47,4) и (47,5) описывают движение твердого тела относительно подвижной системы координат, неизменно связанной с движущимся твердым телом. Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что в этих уравнениях все проекции векторов относятся к главным осям инерции.

Последние три уравнения (47,5) называются обычно *уравнениями Эйлера*.

§ 48. Свободное движение твердого тела

Рассмотрим с помощью уравнений Эйлера свободное движение волчка. Так как при свободном движении общий момент сил равен нулю, то уравнения Эйлера принимают вид

$$\left.\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 &= 0, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 &= 0, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{48,1}$$

В зависимости от степени симметрии волчка, рассмотрим последовательно три случая.

1. В случае шарового волчка, когда все три момента инерции равны друг другу:

$$I_1 = I_2 = I_3, \tag{48,2}$$

уравнения (48,1) сводятся к уравнениям

$$\dot{\Omega}_1 = 0, \quad \dot{\Omega}_2 = 0, \quad \dot{\Omega}_3 = 0. \tag{48,3}$$

Отсюда следует, что компоненты угловой скорости по главным осям инерции остаются постоянными,

$$\Omega_1 = \Omega_1^0, \quad \Omega_2 = \Omega_2^0, \quad \Omega_3 = \Omega_3^0. \tag{48,4}$$

Этот результат уже был получен нами в § 44.

2. Обращаясь к случаю симметричного волчка, введем, как и в § 44, обозначения

$$I_1 = I_2 = A, \quad I_3 = C. \tag{48,5}$$

Тогда из уравнений Эйлера (48,1) получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= \frac{A-C}{A}\,\Omega_2\Omega_3,\\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{C-A}{A}\,\Omega_3\Omega_1,\\ \dot{\Omega}_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{48,6}$$

Эти уравнения легко интегрируются. Последнее уравнение показывает, что проекция угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на ось симметрии C остается постоянной во все время движения, т. е.

$$\Omega_3 = \mathrm{const}. \tag{48,7}$$

Приняв это во внимание, мы можем ввести в первые два уравнения постоянную, имеющую размерность угловой скорости:

$$\frac{A-C}{A}\,\Omega_3 = a.$$

Первые два уравнения напишутся теперь так:

$$\dot{\Omega}_1 = a\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = -a\Omega_1.$$

Введя в качестве переменной величину $\Omega_1 + i\Omega_2$, можно написать оба эти уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = -ia(\Omega_1 + i\Omega_2).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{-iat+i\alpha}. \tag{48,8}$$

Амплитуда A и фаза α являются произвольными постоянными интегрирования. Выберем начало отсчета времени в тот момент, когда $\Omega_2 = 0$. Тогда $\alpha = 0$ и мы получаем, отделяя в (48,8) вещественную часть от мнимой,

$$\Omega_1 = A\cos at, \quad \Omega_2 = A\sin at. \tag{48,9}$$

Эти равенства показывают, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси симметрии, оставаясь по абсолютной величине постоянной $\left(\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A\right)$, вращается в данной плоскости с угловой скоростью a. Выше мы видели, что проекция угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ на ось симметрии тоже остается постоянной. Отсюда заключаем, что и сам вектор $\mathbf{A}$, оставаясь постоянным по своей величине, вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Таким образом мы опять получаем результат, найденный в § 44 при помощи эйлеровых координат.

3. Рассмотрим теперь общий случай свободного движения твердого тела, у которого все три главных момента инерции различны, т. е.

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3. \tag{48,10}$$

В этом случае удобно воспользоваться законами сохранения энергии и момента. Центр инерции тела неподвижен, а потенциальной энергии нет, так как мы рассматриваем свободное движение. Поэтому вся энергия, которую мы обозначим через E сводится к кинетической энергии вращательного движения. Компоненты момента по подвижным осям, конечно, изменяются; однако квадрат момента, равный сумме квадратов своих компонент, остается постоянным, так как его величина не зависит от того, на какие оси взяты проекции. Обозначим абсолютную величину момента через M. Ω_1, Ω_2 и Ω_3 можно выразить через E, M и абсолютную величину Ω угловой скорости тела. Из системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} I_1^2\Omega_1^2+I_2^2\Omega_2^2+I_3^2\Omega_3^2&=M^2,\\ I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2&=2E,\\ \Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2&=\Omega^2, \end{aligned}\right\} \tag{48,11}$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1^2&=\frac{I_2I_3}{(I_1-I_2)(I_2-I_3)}(\Omega^2-\varepsilon_1^2),\\ \Omega_2^2&=\frac{I_3I_1}{(I_2-I_3)(I_3-I_1)}(\varepsilon_2^2-\Omega^2),\\ \Omega_3^2&=\frac{I_1I_2}{(I_3-I_1)(I_1-I_2)}(\Omega^2-\varepsilon_3^2), \end{aligned}\right\} \tag{48,12}$$

где ε_1, ε_2, ε_3 следующим образом выражаются через энергию, момент и моменты инерции

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1^2&=\frac{2(I_2+I_3)E-M^2}{I_2I_3}, \quad \varepsilon_2^2=\frac{2(I_3+I_1)E-M^2}{I_3I_1},\\ \varepsilon_3^2&=\frac{2(I_1+I_2)E-M^2}{I_1I_2}. \end{aligned}\right\} \tag{48,13}$$

Перемножая равенства (48,12) и извлекая квадратный корень, находим

$$\Omega_1\Omega_2\Omega_3=\pm\frac{I_1I_2I_3}{(I_1-I_2)(I_1-I_3)(I_2-I_3)}\sqrt{(\Omega^2-\varepsilon_1^2)(\varepsilon_2^2-\Omega^2)(\Omega^2-\varepsilon_3^2)}. \tag{48,14}$$

С другой стороны, умножая уравнения (48,1) на Ω_1/I_1, Ω_2/I_2 и Ω_3/I_3, соответственно, и складывая, получаем

$$\Omega_1\frac{d\Omega_1}{dt}+\Omega_2\frac{d\Omega_2}{dt}+\Omega_3\frac{d\Omega_3}{dt}=\frac{(I_1-I_2)(I_2-I_3)(I_3-I_1)}{I_1I_2I_3}\Omega_1\Omega_2\Omega_3$$

Заметив, что левая часть последнего равенства представляет собой полный диференциал и подставив вместо Ω_1, Ω_2, Ω_3 выражение (48,14), приходим к следующему диференциальному уравнению для Ω^2:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^2}{dt}=\pm\sqrt{(\Omega^2-\varepsilon_1^2)(\varepsilon_2^2-\Omega^2)(\Omega^2-\varepsilon_3^2)}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$t-t_0=\pm\frac{1}{2}\int\frac{d\Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2-\varepsilon_1^2)(\varepsilon_2^2-\Omega^2)(\Omega^2-\varepsilon_3^2)}}. \tag{48,15}$$

Это — эллиптический интеграл и Ω^2 может быть отсюда выражено как функция времени посредством эллиптических функций. Из уравнений (48,12) можно затем найти и Ω_1, Ω_2, Ω_3.

§ 49. Соприкосновение твердых тел

Если мы имеем систему соприкасающихся твердых тел, на которые действуют какие-либо силы, то условием равновесия как всегда является условие минимума потенциальной энергии. Однако для твердых тел это условие можно сформулировать и иначе. Рассмотрим силы, с которыми взаимодействуют друг с другом два соприкасающихся твердых тела. Из определения твердого тела вытекает, что эти силы имеют такой характер, что тела можно считать непроницаемыми, т. е. твердые тела имеют определенные граничные поверхности, причем два тела могут приближаться друг к другу только до тех пор пока их поверхности не пришли в соприкосновение. Другими словами энергия взаимодействия при сближении тел чрезвычайно быстро возрастает после того, как тела соприкоснулись.

Поскольку потенциальная энергия при движении по нормали к обеим поверхностям, проведенной в точке соприкосновения, возрастает, а при движении в касательной плоскости — нет, то сила взаимодействия направлена по нормали. Эта сила носит название *реакции*.

Так как к обоим соприкасающимся телам применим закон равенства действия и противодействия, то силы, с которыми твердые тела действуют друг на друга, равны по величине, но направлены в противоположные стороны.

При помощи сил реакции можно сформулировать условия равновесия соприкасающихся твердых тел, на которые действуют какие-либо силы. Рассмотрим одно из этих тел. Те твердые тела, с которыми оно соприкасается, ограничивают движение этого тела. В этом смысле говорят, что на тело наложены связи. Влияние связей, т. е. наличия твердых тел, с которыми соприкасается данное твердое тело можно, очевидно, учесть, если в число действующих на него сил включить силы реакции.

Условие равновесия мы получим, как это видно из уравнений движения (45,6), приравняв нулю для каждого тела в отдельности вектор общей силы и вектор общего момента сил, причем в число сил следует включить и силы реакции. Таким образом в случае равновесия для каждого тела имеют место уравнения

$$\mathbf{F}=0, \quad \mathbf{K}=0.$$

В проекциях на оси координат имеем шесть уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x=0, \quad \sum F_y=0, \quad \sum F_z=0, \\ \sum(yF_z-zF_y)=0, \quad \sum(zF_x-xF_z)=0, \quad \sum(xF_y-yF_x)=0. \end{aligned}\right\} \quad (49,1)$$

Суммирование здесь производится по силам, действующим на данное твердое тело. Моменты сил можно вычислять относительно произвольной точки.

Если мы имеем твердое тело, укрепленное в некоторой точке, то это означает, что оно соприкасается с другим телом, имеющим весьма малые размеры. Так как направление реакции зависит от взаимной ориентации соприкасающихся поверхностей, а при уменьшении размеров тела соприкосновение с ним может произойти в любом участке его поверхности, то направление силы реакции становится произвольным. В этом случае не только величина силы реакции, но и ее направление определяется из уравнений (49,1).

Если твердое тело укреплено на некоторой оси (т. е. оно может двигаться только вдоль этой оси), то силы реакции перпендикулярны оси.

Если соприкасающиеся твердые тела движутся друг относительно друга, то кроме сил реакции появляются некоторые дополнительные силы, которые носят название *сил трения*.

Возможны два типа движения соприкасающихся твердых тел: *скольжение* и *качение*. При скольжении реакции перпендикулярны к соприкасающимся поверхностям. Помимо этой реакции при скольжении от трения появляется еще касательная сила.

При качении в точке соприкосновения нет относительного движения и потому катящееся твердое тело в каждый момент времени можно рассматривать как закрепленное в точке соприкосновение. Поэтому направление реакции является произвольным, т. е. не обязательно перпендикулярным к касательной плоскости. Кроме того, так как реальные твердые тела соприкасаются не в точке, а по некоторому участку и силы, действующие в различных точках этого участка, не одинаковы, то возникает некоторый момент сил относительно точки соприкосновения. Таким образом при качении реакция направлена произвольно, а трение проявляется в том, что возникает дополнительный момент сил (трение при качении).

Если при скольжении трение настолько мало, что им можно вовсе пренебречь, то соприкасающиеся твердые тела называются абсолютно гладкими. При таком скольжении остаются только силы реакции, перпендикулярные к поверхностям. Напротив, если тела могут только катиться без скольжения, а трением при качении можно пренебречь, то их называют „вполне шероховатыми".

В обоих этих случаях конкретные свойства трения, очевидно, несущественны и решение задачи может быть получено из общих механических соображений.

Рассмотрим ближе связи, которым может быть подчинено движение твердого тела. Каждую такую связь можно выразить в виде уравнения, содержащего время и переменные, характеризующие состояние тела:

$$f(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots) = 0.$$

Если это уравнение содержит только время и координаты, то связь называется *голономной*. Если же оно содержит существенным образом и производные от координат по времени, то связь называется *неголономной*. Иными словами, голономные связи ограничивают возможные положения системы, а неголономные связи ограничивают только возможные перемещения.

Существенное различие между голономными и неголономными связями состоит в следующем. При наличии голономных связей можно воспользоваться уравнениями связей для того, чтобы выразить положение тела через меньшее число координат. Оставшиеся после такого исключения координаты будут уже независимыми. Напротив, уравнения неголономных связей нельзя использовать для уменьшения числа координат, так как эти уравнения нельзя привести к соотношениям, связывающим только координаты. Поэтому в случае неголономных связей координаты, которыми приходится пользоваться, не являются независимыми.

Одним из наиболее простых примеров неголономных связей является движение колеса на плоскости. Предположим, что колесо с радиусом a удерживается перпендикулярно к плоскости. Положение колеса (рис. 46) определяется координатами x, y центра инерции колеса, углом φ, образованным проекцией плоскости колеса на плоскости xy с осью x, и наконец, углом ψ поворота колеса около своей оси.

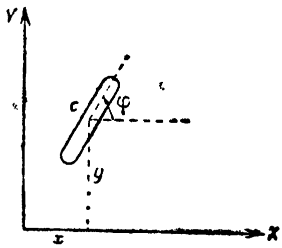


Рис. 46.

Обобщенные координаты колеса x, y, φ, ψ следует подчинить тому условию, что колесо катится без скольжения. Это условие можно записать в виде двух равенств

$$\delta x = a\cos\varphi\,\delta\psi, \quad \delta y = a\sin\varphi\,\delta\psi,$$

или

$$\dot{x} = a\cos\varphi\dot{\psi}, \quad \dot{y} = a\sin\varphi\dot{\psi}.$$

Легко видеть, что эти соотношения проинтегрировать нельзя.

Движение твердых тел, соприкасающихся друг с другом, а также возникающие при этом реакции, можно определить, применяя к каждому телу шесть уравнений Эйлера (§ 47),

$$\left.\begin{aligned}
&\mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) = F_1,\\
&\mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) = F_2,\\
&\mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) = F_3,\\
\text{и}\quad &I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 = K_1,\\
&I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 = K_2,\\
&I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 = K_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (49{,}2)$$

При этом в число сил, действующих на твердое тело, следует включить и силы реакции. Этот способ определения реакций носит название *принципа д'Аламбера.*

Если система голономна и трением можно пренебречь, то для исследования движения можно применить и уравнения Лагранжа. Напротив, если система неголономна, то метод Лагранжа в прямом виде уже неприменим, так как не все возможные перемещения независимы. В этом случае следует пользоваться либо уравнениями (49,2), либо выводить уравнения движения путем варьирования интеграла $\int L\,dt$ при наличии дополнительных условий, определяющих налагаемые связи.

Задачи

1. а) BD — однородный стержень с весом P; его конец прикреплен к стене AC нитью AB. Определить реакцию стены и натяжение нити (рис. 47).

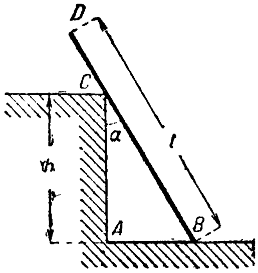


Рис. 47.

Решение. Вес стержня представляется силой, приложенной в его середине и направленной вниз по оси y. Натяжение нити T направлено по AB от B к A; реакция R_b в точке B — вертикально вверх и реакция R_c в точке C — по перпендикуляру к стержню BD в точке C:

$$R_c = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha, \quad T = \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha\cos\alpha,$$

$$R_b = P - \frac{Pl}{4h}\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

б) Стержень AB с весом P и длиной l удерживается двумя горизонтальными нитями AD и CB; конец A стержня опирается о вертикальную плоскость, конец B — о горизонтальную (рис. 48). Найти натяжения нитей и реакции плоскостей.

Решение. Натяжения нитей T_a и T_b направлены от A к D и от B к C. Реакции плоскостей R_a и R_b направлены перпендикулярно плоскостям:

$$R_a = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta, \quad R_b = P, \quad T_a = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta, \quad T_b = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

в) Два стержня с длиной l соединены сверху шарниром, а внизу нитью (рис. 49), так что угол между стержнями и нитью равен α. К середине одного из стержней приложена сила F. Определить силы реакции.

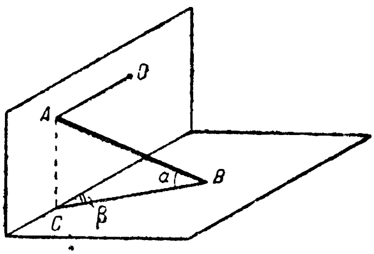


Рис. 48.

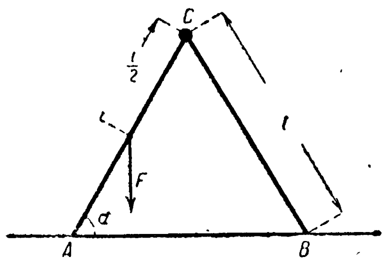


Рис. 49.

Решение. Вводим натяжение нити T, направленное в точке A от A к B, а в точке B — от B к A; реакции R_a и R_b опоры в точках A и B, направленные перпендикулярно к опоре, и наконец, реакцию R_c в точке C на стержень AC. Тогда — R_c есть реакция на стержень CB. Угол, образуемый приложенной силой с горизонталью, обозначим посредством β. Тогда закон сил для стержня AC:

$$-F + R_a + R_c\sin\beta = 0, \quad T - R_c\cos\beta = 0$$

и закон моментов (относительно точки A):

$$F\frac{l}{2}\cos\alpha - R_c l\sin(\beta+\alpha) = 0.$$

Закон сил и моментов (относительно точки B) для стержня BC:

$$R_b - R_c \sin\beta = 0, \quad T - R_c \cos\beta = 0, \quad lR_a \sin(\beta - \alpha) = 0.$$

Отсюда

$$\beta = \alpha, \quad R_a = \frac{3F}{4}, \quad R_b = \frac{F}{4}, \quad R_c = \frac{F}{4\sin\alpha}, \quad T = \frac{F}{4}\operatorname{ctg}\alpha.$$

§ 50. Движение в неинерциальной системе координат

До сих пор, рассматривая движение материальной точки или системы материальных точек, мы всегда относили это движение к некоторой инерциальной системе отсчета. Соответственно этому мы пользовались функцией Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U. \tag{50,1}$$

Составляя уравнения Лагранжа, мы имели уравнения движения точки в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{50,2}$$

Подобные уравнения движения имеют место во всех инерциальных системах отсчета, которые, как известно, движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Не то будет, если мы перейдем к ускоренной системе координат. Функция Лагранжа не будет уже иметь вида (50,1). Изменятся и уравнения движения.

Однако принцип наименьшего действия, а следовательно, и вытекающие из него уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{50,3}$$

остаются в силе для любых, как угодно движущихся систем отсчета. Поэтому, чтобы получить уравнения движения материальной точки, отнесенные к неинерциальной, ускоренной системе координат достаточно преобразовать к новой системе функцию Лагранжа и затем составить уравнения (50,3).

Рассмотрим сначала систему координат K', которая движется поступательно относительно инерциальной системы K с некоторой скоростью $\mathbf{V}(t)$. Скорость материальной точки относительно системы K обозначим через $\mathbf{v}$, а относительно системы K' — через $\mathbf{v}'$. Тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t). \tag{50,4}$$

Заменив в функции Лагранжа (50,1) скорость $\mathbf{v}$ согласно последней формуле, получим

$$L = \frac{mv^2}{2} - U = \frac{m}{2}(\mathbf{v}' + \mathbf{V}(t))^2 - U = \frac{mv'^2}{2} + m\mathbf{V}(t)\cdot\mathbf{v}' + \frac{m\mathbf{V}(t)^2}{2} - U.$$

Скорость $\mathbf{V}(t)$ является заданной функцией времени и поэтому $\frac{m\mathbf{V}(t)^2}{2}$, как полную производную по времени, можно опустить. Далее, так как $\mathbf{v}'=\dot{\mathbf{r}}'$, где $\mathbf{r}'$ есть радиус-вектор материальной точки в системе координат K', то

$$m\mathbf{V}(t)\,\mathbf{v}'=\frac{d}{dt}(m\mathbf{V}(t)\cdot\mathbf{r}')-m\mathbf{r}'\cdot\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}.$$

Подставив это в функцию Лагранжа, опустив полную производную по времени и вводя вектор $\mathbf{W}(t)=\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}$ — ускорение поступательного движения системы координат K', находим

$$L=\frac{mv'^2}{2}-m\mathbf{W}(t)\cdot\mathbf{r}'-U. \tag{50,5}$$

Составим уравнение Лагранжа, получим уравнение движения материальной точки в системе координат K'

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}'}-m\mathbf{W}(t). \tag{50,6}$$

Сравнивая это уравнение с (50,2), мы видим, что в ускоренной, поступательно движущейся системе координат появляется дополнительное однородное силовое поле, причем сила, действующая на материальную точку, равна произведению массы материальной точки на ускорение $\mathbf{W}(t)$ и направлена в противоположную этому ускорению сторону. Эта сила именуется обычно *силой инерции*.

Если система координат не только движется поступательно, но и вращается, то мы должны снова преобразовать функцию Лагранжа. Пусть система координат K'' имеет общее начало с рассмотренной нами выше системой K', но вращается относительно нее с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$. Найдем связь между скоростями материальной точки по отношению к этим двум системам координат. На основании соотношения (47,2) мы имеем

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}+\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r}'.$$

Здесь вектор $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$ является скоростью изменения вектора $\mathbf{r}'$ во вращающейся системе координат K'', т. е. определяет скорость точки по отношению к системе координат K''. Обозначая эту скорость через $\mathbf{v}''$, имеем

$$\mathbf{v}'=\mathbf{v}''+\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r}'. \tag{50,7}$$

Подставив это в функцию Лагранжа (50,5), находим

$$L=\frac{mv''^2}{2}+m\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r}')+\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r}')^2-m\mathbf{W}(t)\,\mathbf{r}'-U,$$

откуда (штрихи для простоты письма мы опускаем)

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\mathbf{v}\cdot(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})+\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})^2-m\mathbf{W}(t)\,\mathbf{r}-U. \tag{50,8}$$

Это и есть функция Лагранжа для одной материальной точки в системе координат, начало которой движется относительно инерциальной системы с ускорением $\mathbf{W}(t)$ и которая в то же время вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}(t)$. Характерно для этой функции Лагранжа то, что она содержит член, зависящий от скорости линейно. Таким образом при переходе к вращающейся системе координат изменяется самый тип функции Лагранжа.

Чтобы найти обобщенный импульс и обобщенную силу, составим производные функции Лагранжа. Для второго слагаемого в (50,8) имеем

$$\delta\{\mathbf{v}(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\}=(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{v}+(\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}(t))\cdot\delta\mathbf{r},$$

а для третьего

$$\delta(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})^2=2(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{\Omega}(t)\times\delta\mathbf{r})=2[(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}(t)]\cdot\delta\mathbf{r}.$$

Окончательно для диференциала функции Лагранжа получаем

$$\delta L=m\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}+m(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\cdot\delta\mathbf{v}+m(\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}(t))\cdot\delta\mathbf{r}+$$
$$+m[(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}(t)]\cdot\delta\mathbf{r}-m\mathbf{W}(t)\,\delta\mathbf{r}-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}\delta\mathbf{r}. \qquad (50,9)$$

Чтобы составить уравнения Лагранжа, находим отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=m\mathbf{v}+m\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r}$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}=m\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}(t)+m[(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}(t)]-m\mathbf{W}(t)-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}};$$

далее,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+m\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{v}+m\dot{\mathbf{\Omega}}(t)\times\mathbf{r}.$$

Отсюда находим уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}=\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}}$ в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}-m\mathbf{W}(t)+m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{\Omega}}(t)+2m\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}(t)+$$
$$+m(\mathbf{\Omega}(t)\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}(t). \qquad (50,10)$$

Это и есть уравнение движения материальной точки в ускоренной системе отсчета. Из этого уравнения мы видим, что сила инерции, обусловленная вращением системы координат, в которой рассматривается движение, слагается из трех частей. Сила $m\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{\Omega}}$ пропорциональна производной от угловой скорости; сила $m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}$ носит название центробежной силы.

Рассмотрим сначала так называемую центробежную силу. Вектор $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ перпендикулярен $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{r}$, а по величине равен $\Omega\rho$, где ρ — цилиндрический радиус точки в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{\Omega}$. Поэтому вектор $(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ и $\mathbf{\Omega}$, лежит в плоскости, проходящей через направления векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{r}$, а по величине равен $\Omega^2\rho$. Таким образом центробежная сила перпендикулярна мгновенной оси вращения, направлена от оси, а по величине равна произведению массы, движущейся материальной точки на квадрат угловой скорости и на длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на направление вектора угловой скорости.

Сила $2m\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}$ называется *силой Кориолиса*; отметим, что эта в отличие от всех, рассматривавшихся нами до сих пор, зависит от скорости.

Задачи

1. Найти функцию Лагранжа для свободного движения точки, взяв в качестве системы координат равномерно вращающееся твердое тело:

а) плоскость, расположенную под углом α к оси вращения.

Решение. Ось x выбираем на вращающейся плоскости, перпендикулярно оси вращения; угол между осью вращения и осью y есть α (рис. 50). Тогда проекции Ω на оси x, y, z равны, соответственно, 0, $\Omega\cos\alpha$, $\Omega\sin\alpha\cdot\mathbf{v}$ имеет компоненты $\dot{x}$, $\dot{y}$, 0. Следовательно,

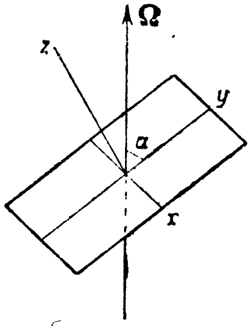


Рис. 50.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + m\Omega\sin\alpha\,(x\dot{y}-y\dot{x}) + \frac{m\Omega}{2}(x^2+y^2\sin^2\alpha).$$

Если Ω мала, и можно пренебречь членами с Ω^2, то, как видно из найденной функции Лагранжа, вращение вокруг указанной оси эквивалентно вращению с угловой скоростью $\Omega\sin\alpha$ вокруг оси z. Поэтому в этом случае можно определить движение на неподвижной плоскости; истинное же движение будет отличаться дополнительным вращением вокруг перпендикуляра к ней с угловой скоростью $\Omega\sin\alpha$. Отсюда получается, в частности, формула маятника Фуко.

б) Цилиндр, ось которого перпендикулярна оси вращения.

Решение. Ось x выбираем по оси вращения, ось z — по оси цилиндра (рис. 51). Тогда компоненты по осям x, y, z радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки, движущейся по цилиндру: $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, z, а скорости $\mathbf{v}$: $-r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $r\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\dot{z}$. Угловая скорость Ω имеет компоненту только по оси x.

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2) + m\Omega r(\dot{z}\sin\varphi - z\dot{\varphi}\cos\varphi) + \frac{m}{2}\Omega^2(z^2+r^2\sin^2\varphi).$$

в) Конус, ось которого перпендикулярна оси вращения.

Решение. Ось x выбираем по оси вращения, ось z — по оси конуса. Угол при вершине конуса обозначим через 2α (рис. 52). Тогда компоненты

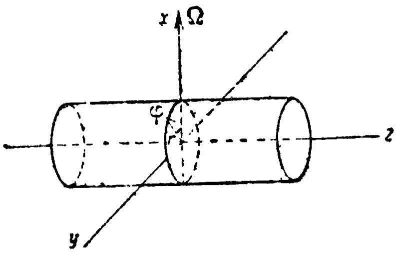


Рис. 51.

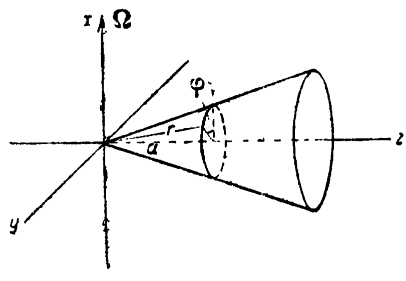


Рис. 52.

по осям x, y, z радиуса-вектора $\mathbf{r}$ точки, движущейся по конусу, равны, соответственно, $r\sin\alpha\cos\varphi$, $r\sin\alpha\sin\varphi$, $r\cos\alpha$ (r — расстояние точки от начала координат, φ — угол между осью x и проекцией $\mathbf{r}$ на плоскость xy). Компоненты скорости $\mathbf{v}$: $\dot{r}\sin\alpha\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi$, $\dot{r}\sin\alpha\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\alpha\cos\varphi$, $\dot{r}\cos\alpha$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - \frac{1}{2}mrz\dot{\varphi}\Omega\sin 2\alpha\cos\varphi + \frac{m}{2}\Omega^2r^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\varphi).$$

2. Найти отклонения, обусловленные вращением земли, для свободно падающей материальной точки. Угловую скорость вращения считать малой. Рассмотреть два случая:

а) точка падает без начальной скорости.

Решение. Воспользуемся уравнением (50,10), положив $\mathbf{W}=0$. В поле тяжести $U=m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}$, где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения в поле тяжести. Направив ось z по вертикали, мы найдем $g_x=g_y=0$, $g_z=g$. Пренебрегая членами, содержащими квадрат угловой скорости, находим уравнение движения в виде

$$\dot{\mathbf{v}}=2\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}-\mathbf{g}.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений. Для этого полагаем $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1$ есть решение уравнения $\dot{\mathbf{v}}=-\mathbf{g}$, т. е. $\mathbf{v}_1=-\mathbf{g}t+\mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость. Подставляя $\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ в исходное уравнение и оставляя справа только $\mathbf{v}_1$, находим

$$\dot{\mathbf{v}}_2=2\mathbf{v}_1\times\mathbf{\Omega}=-2t\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}+2\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega},$$

откуда

$$\mathbf{v}_2=-t^2\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}+2t\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega}.$$

Таким образом скорость равна

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_0-\mathbf{g}t-t^2\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}+2t\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega}.$$

Проинтегрировав еще раз, находим

$$\mathbf{r}=\mathbf{h}+\mathbf{v}_0t-\frac{\mathbf{g}t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\mathbf{g}\times\mathbf{\Omega}+t^2\mathbf{v}_0\times\mathbf{\Omega},$$

где $\mathbf{h}$ — начальное положение точки.

Поскольку начальная скорость равна нулю, то

$$x=\frac{t^3}{3}g\Omega_y,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x,\quad z=h-\frac{gt^2}{2}.$$

Если выбрать ось x по меридиану и обозначить широту через λ, то

$$\Omega_x=\Omega\cos\lambda,\quad \Omega_y=0,\quad \Omega_z=\Omega\sin\lambda$$

и

$$x=0,\quad y=-\frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda$$

— частица упадет на землю за время $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. При этом отклонение на восток будет

$$-y=\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}g\Omega\cos\lambda.$$

б) Точка падает с начальной скоростью v_0, перпендикулярной направлению вертикали.

Решение. Выбираем ось x в направлении первоначальной скорости (которая по условию перпендикулярна оси z). Тогда $v_{0x}=v_0$, $v_{0y}=v_{0z}=0$. Пользуясь общей формулой для $\mathbf{r}$ (см. задачу 2а), находим

$$x=v_0t+\frac{t^3}{3}g\Omega_y,$$

$$y=-\frac{t^3}{3}g\Omega_x-t^2v_0\Omega_z,$$

$$z=h-\frac{gt^2}{2}+t^2v_0\Omega_y;$$

откуда при $z=0$, пренебрегая членами высших порядков,

$$x=\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[v_0+\left(\frac{2}{3}h+\frac{v_0^2}{g}\right)\Omega_y\right],\quad y=-\frac{2h}{g}v_0\Omega_z-\frac{2h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\Omega_x.$$

§ 51. Энергия во вращающейся системе координат

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся системы координат, не имеющей поступательного ускорения. Положив в (50,8)

$$\mathbf{W}(t)=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{\Omega}(t)=\mathbf{\Omega}=\text{const}, \tag{51,1}$$

мы увидим, что в этом случае функция Лагранжа будет

$$L=\frac{mv^2}{2}+m\mathbf{v}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})+\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2-U, \tag{51,2}$$

а уравнение движения примет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}}+2m\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}+m(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\times\mathbf{\Omega}. \tag{51,3}$$

Найдем для рассматриваемого случая энергию материальной точки. Пользуясь формулой $E=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L$ и подставляя в нее $\mathbf{p}=m\mathbf{v}+m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$ и (51,2), получаем

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2+U. \tag{51,4}$$

Мы видим отсюда, что к обычному выражению для энергии точки во вращающейся системе координат добавляется еще член, пропорциональный квадрату угловой скорости. Эта дополнительная потенциальная энергия $-\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2$ носит название *центробежной энергии.*

Та энергия, которую мы здесь нашли, есть энергия материальной точки во вращающейся системе координат и, возвращаясь к старым обозначениям, мы можем обозначить ее через E''. Эта энергия не равна, конечно, энергии E точки в инерциальной системе координат K. Выясним, как преобразовывается энергия при переходе к вращающейся системе координат. При этом вместо одной точки мы рассмотрим для общности систему материальных точек.

Функции Лагранжа в инерциальной системе K и вращающейся системе K'' будут, соответственно, иметь вид

$$L=\sum\frac{mv^2}{2}-U$$

и

$$L''=\sum\frac{mv''^2}{2}+\sum m\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})+\sum\frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})^2-U,$$

а энергии —

$$E=\sum\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L \quad \text{и} \quad E''=\sum\mathbf{p}''\cdot\mathbf{v}''-L''. \tag{51,5}$$

Прежде всего заметим, что при преобразовании функции Лагранжа от инерциальной системы координат K к вращающейся системе K'', не имеющей поступательного ускорения, мы никакой полной производной из функции Лагранжа не выбрасываем. Поэтому $L=L''$. Кроме того, из равенств

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}, \quad \mathbf{p}''=m\mathbf{v}''+m\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}=\mathbf{v}''+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$$

следует, что импульсы в обеих системах координат равны друг другу, т. е.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}''. \tag{51,6}$$

Поэтому вместо (51,5) имеем

$$\left.\begin{aligned} E &= \sum \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L, \\ E'' &= \sum \mathbf{p}\cdot\mathbf{v}'' - L. \end{aligned}\right\} \tag{51,7}$$

Вычитая второе равенство из первого и замечая, что $\mathbf{v} - \mathbf{v}'' = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, имеем

$$E - E'' = \sum \mathbf{p}\cdot(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}).$$

Переставляя под знаком суммы множители и вынося угловую скорость за знак суммы, имеем

$$E = E'' + \mathbf{\Omega}\sum \mathbf{r}\times\mathbf{p}.$$

Вводя момент $\mathbf{M}$ системы, получим формулу для преобразования энергии к вращающейся системе координат в виде

$$E'' = E - \mathbf{\Omega}\mathbf{M}. \tag{51,8}$$

ГЛАВА VI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 52. Уравнения Гамильтона

До сих пор в качестве основных уравнений механики мы пользовались уравнениями Лагранжа, которые для механической системы с n степенями свободы образуют систему n диференциальных уравнений второго порядка. Иногда удобнее перейти от этих n уравнений второго порядка к новой системе $2n$ уравнений первого порядка. При этом оказывается наиболее целесообразным в качестве $2n$ переменных выбрать координаты и импульсы системы.

Рассмотрим два ряда каких-либо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Функция f, диференциал которой удовлетворяет соотношению

$$df = y_1\,dx_1 + y_2\,dx_2 + \ldots + y_k\,dx_k,$$

называется производящей функцией по отношению к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Частные производные от производящей функции по переменным, от которых она зависит, равны остальным переменным. Если в качестве основных переменных выбрать не $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а какие-либо другие k переменных из $2k$ переменных $x_1, \ldots, y_k$, то производящая функция будет уже другая. Переход от одной системы переменных в качестве основных к другой и связанный с этим переход от одной производящей функции к другой, называется *преобразованием Лежандра*.

Полный диференциал функции Лагранжа равен

$$dL = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial L}{d\dot{q}_i} d\dot{q}_i,$$

или

$$dL = \sum \dot{p}_i \, dq_i + \sum p_i \, d\dot{q}_i. \tag{52,1}$$

Из этого выражения видно, что функция Лагранжа является производящей функцией по отношению к переменным q_i и $\dot{q}_i$.

Примем теперь в качестве переменных, определяющих в каждый момент времени состояние системы, не координаты и скорости, а координаты и импульсы. Чтобы найти производящую функцию по отношению к переменным q_i и p_i, мы вычтем из обеих частей равенства полный диференциал $d(\sum \dot{q}_i p_i) = \sum \dot{q}_i \, dp_i + \sum p_i \, d\dot{q}_i$. Тогда мы получим

$$d(L - \sum p_i \dot{q}_i) = \sum \dot{p}_i \, dq_i - \sum \dot{q}_i \, dp_i. \tag{52,2}$$

Величина, стоящая под знаком диференциала в левой части этого равенства, выраженная через координаты и импульсы, и является производящей функцией по отношению к q_i и p_i. Взятая с обратным знаком она называется *гамильтоновой функцией* механической системы и обозначается через H, так что

$$H(q_i, \, p_i, \, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L. \tag{52,3}$$

Соотношение (52,2) дает теперь

$$dH = \sum \dot{q}_i \, dp_i - \sum \dot{p}_i \, dq_i, \tag{52,4}$$

откуда следуют уравнения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \, 2, \ldots, \, n). \tag{52,5}$$

Эта система $2n$ обыкновенных диференциальных уравнений первого порядка с $2n$ неизвестными функциями $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ носит название *уравнений Гамильтона*. Благодаря своей простоте и симметрии они получили также название *канонических уравнений механики*.

Как известно, интегрируя систему (52,5), мы получаем для координат и импульсов решения, содержащие $2n$ произвольных постоянных. Эти постоянные определяются из начальных условий. Если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то состояние системы не зависит от изменения начала отсчета времени; поэтому одна из произвольных постоянных аддитивно связана со временем. Решения в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} q_i &= q_i(t - t_0, \, C_1, \, C_2, \ldots, \, C_{2n-1}), \\ p_i &= p_i(t - t_0, \, C_1, \, C_2, \ldots, \, C_{2n-1}) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \, 2, \ldots, \, n),$$

где $t_0, \, C_1, \, C_2, \ldots, \, C_{2n-1}$ — $2n$ произвольных постоянных интегрирования.

Сравнивая определение (52,3) функции Гамильтона с определением энергии, мы видим, что если функция Лагранжа не зависит от времени явно (система замкнута или находится в постоянных внешних условиях), то функция Гамильтона сохраняется и совпадает с энергией системы.

Закон сохранения энергии непосредственно следует и из уравнений Гамильтона. Взяв полную производную от Гамильтоновой функции по времени, имеем

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ их выражения из уравнений Гамильтона, получим

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{52,6}$$

Таким образом, действительно, если функция Гамильтона не зависит от времени явно, то она сохраняется.

Если кинетическая энергия является квадратичной функцией скоростей, то как уже было указано в § 7, энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Поэтому для составления функции Гамильтона в этом случае достаточно выразить кинетическую энергию системы через координаты и импульсы и прибавить к ней потенциальную энергию. Тогда получим

$$H(q,\ p)=T(q,\ p)+U(q). \tag{52,7}$$

Для системы материальных точек в инерциальной системе координат

$$L=\sum\frac{m_i v_i^2}{2}-U(q),$$

$$\mathbf{p}_i=m_i\mathbf{v}_i,\quad \mathbf{v}_i=\frac{\mathbf{p}_i}{m}.$$

Заменив в выражении для энергии скорости через импульсы, найдем

$$H=\sum\frac{p_i^2}{2m_i}+U(q). \tag{52,8}$$

Для одной материальной точки в декартовой системе координат имеем

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+U(x,\ y,\ z). \tag{52,9}$$

В качестве примера составим еще функцию Гамильтона в цилиндрических и сферических координатах. В цилиндрических координатах

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(\rho,\ \varphi,\ z);$$

$$p_\rho=m\dot{\rho},\quad p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi},\quad p_z=m\dot{z};$$

$$\dot{\rho}=\frac{p_\rho}{m},\quad \dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{m\rho^2},\quad \dot{z}=\frac{p_z}{m}.$$

Из (52,7) находим функцию Гамильтона в цилиндрических координатах

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)+U(\rho, \varphi, z). \tag{52,10}$$

В сферических координатах

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\vartheta^2+r^2\sin^2\vartheta\dot\varphi^2)-U(r, \vartheta, \varphi);$$

$$\dot r=\frac{p_r}{m}, \quad \dot\vartheta=\frac{p_\vartheta}{mr^2}, \quad \dot\varphi=\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\vartheta}.$$

Поэтому функция Гамильтона для одной материальной точки в сферических координатах имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\vartheta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right)+U(r, \vartheta, \varphi). \tag{52,11}$$

В общем случае, когда кинетическая энергия является произвольной (однако, существенно положительной) квадратичной функцией обобщенных скоростей, функция Лагранжа есть

$$L=\frac{g_{ik}\dot q_i\dot q_k}{2}-U(q).$$

Обобщенные импульсы равны

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=g_{ik}\dot q_k.$$

Если тензор, обратный тензору g_{ik}, обозначить через g_{ik}^{-1}, то из последнего равенства имеем

$$\dot q_i=g_{il}^{-1}p_l.$$

Подставляя эти значения в выражение для кинетической энергии, имеем

$$T=\frac{1}{2}g_{ik}\dot q_i\dot q_k=\frac{1}{2}p_i\dot q_i=\frac{1}{2}g_{il}^{-1}p_ip_l.$$

Таким образом для функции Гамильтона находим

$$H=\frac{g_{ik}^{-1}p_ip_k}{2}+U(q). \tag{52,12}$$

Задачи

1. Написать уравнения Гамильтона, если:

а) $H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+\sin\theta.$

Отв. $\dot r=p_r, \quad \dot\theta=\frac{p_\theta}{r^2\sin^2\theta}, \quad \dot p_r=\frac{p_\theta^2}{r^3\sin^2\theta}, \quad \dot p_\theta=\frac{p_\theta^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}-\cos\theta.$

б) $H=\dfrac{p_u^2+p_v^2}{2(u^2+v^2)}+u.$

Отв. $\dot{u}=\dfrac{p_u}{u^2+v^2}$, $\dot{v}=\dfrac{p_v}{u^2+v^2}$, $\dot{p}_u=\dfrac{u(p_u^2+p_v^2)}{(u^2+v^2)^2}-1$, $\dot{p}_v=\dfrac{v(p_u^2+p_v^2)}{(u^2+v^2)^2}$.

в) $H=\sqrt{1+p^2}+r$. *Отв.* $\dot{r}=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $\dot{p}=-1$.

г) $H=\dfrac{1}{2}(p-r^2)^2$. *Отв.* $\dot{r}=p-r^2$, $\dot{p}=2r(p-r^2)$.

2. Выразить скорость через энергию, если известен импульс как функция от энергии: $p=f(E)$.

Решение. Уравнение Гамильтона $v=\dfrac{\partial E}{\partial p}$. Но $\dfrac{\partial E}{\partial p}=\dfrac{1}{f'(E)}$. Поэтому $v=\dfrac{1}{f'(E)}$.

3. Найти функцию Гамильтона, если дана функция Лагранжа:

а) $L=-mc^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. *Отв.* $H=c\sqrt{c^2p^2+m^2c^2}$.

б) $L=\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+a(x\dot{y}-y\dot{x})$.

Отв. $H=\dfrac{1}{2m}[(p_x+ay)^2+(p_y-ax)^2+p_z^2]$.

в) $L=\dfrac{1}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+\dot{\varphi}^2+(\eta\dot{\xi}-\xi\dot{\eta})\dot{\varphi}$.

Отв. $H=\dfrac{(1-\xi^2)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+p_\varphi^2-2\xi\eta p_\xi p_\eta+2(\xi p_\eta-\eta p_\xi)p_\varphi}{1-\xi^2-\eta^2}$.

г) Для точки, движущейся по твердому телу [функция Лагранжа приведена в тексте § 50, уравнение (50,8)]. *Отв.* $H=\dfrac{p^2}{2m}-\mathbf{\Omega r}\times\mathbf{p}+m\mathbf{rW}+U$.

д) Для задачи 1 § 10.

Решение. Имеем $L=\dfrac{m}{2}\sum v_a^2-\dfrac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum \mathbf{v}_a\right)^2-U$. Импульс $\mathbf{p}_a=m_a\mathbf{v}_a-\dfrac{m^2}{M+nm}\sum \mathbf{v}_i$. Отсюда $\sum \mathbf{p}_a=\dfrac{Mm}{M+nm}\sum \mathbf{v}_i$; поэтому $\mathbf{v}_a=\dfrac{\mathbf{p}_a}{m}+\dfrac{m}{M+nm}\sum \mathbf{v}_a=\dfrac{\mathbf{p}_a}{m}+\dfrac{\Sigma \mathbf{p}_a}{M}$. Подставляя это в выражение для энергии, находим

$$H=\frac{1}{2m}\sum p_a^2+\frac{1}{2M}\left(\sum \mathbf{p}_a\right)^2.$$

§ 53. Функция Рауса

В некоторых случаях целесообразно заменить на импульсы не все обобщенные скорости, а только часть их. В этом случае мы поступим следующим образом: разобьем n координат (где n есть число степеней свободы системы) на две группы в m и μ координат ($m+\mu=n$);

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$, причем состояние системы будем описывать этими n координатами, m — обобщенными скоростями $\dot{q}$, соответствующими координатам первой группы, и μ — обобщенным импульсами p_ξ, соответствующими координатам второй группы.

Для нахождения уравнений движения в новых переменных q, $\dot{q}$, ξ и p_ξ воспользуемся опять преобразованиями Лежандра относительно скоростей $\dot{\xi}$.

Диференциал функции Лагранжа равен

$$\left.\begin{aligned} dL &= \sum \frac{\partial L}{\partial q}\, dq + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} + \sum \frac{\partial L}{\partial \xi}\, d\xi + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\, d\dot{\xi} \\ &\text{или} \\ dL &= \sum \frac{\partial L}{\partial q}\, dq + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} + \sum \dot{p}_\xi\, d\xi + \sum p_\xi\, d\dot{\xi}, \end{aligned}\right\} \tag{53,1}$$

откуда получаем

$$d\left(L - \sum p_\xi \dot{\xi}\right) = \sum \frac{\partial L}{\partial q}\, dq + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} + \sum \dot{p}_\xi\, d\xi - \sum \dot{\xi}\, dp_\xi. \tag{53,2}$$

Введем функцию

$$R(q, \dot{q}, \xi, p_\xi) = \sum p_\xi \dot{\xi} - L, \tag{53,3}$$

в которой все скорости $\dot{\xi}$ при помощи равенств $p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$ выражены через импульсы p_ξ. Эта функция носит название *функции Раусса*.

Из (53,2) имеем теперь

$$dR = -\sum \frac{\partial L}{\partial q}\, dq - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} - \sum \dot{p}_\xi\, d\xi + \sum \dot{\xi}\, dp_\xi, \tag{53,4}$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial R}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}}, \quad \dot{p}_\xi = -\frac{\partial R}{\partial \xi}, \quad \dot{\xi} = \frac{\partial R}{\partial p_\xi}. \tag{53,5}$$

Подставляя первые два равенства в уравнения Лагранжа для координат q, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{53,6}$$

Сопоставляя это со второй парой равенств (53,5), находим

$$\dot{p}_{\xi_i} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_i}, \tag{53,7}$$

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{53,8}$$

Мы видим, что функция Раусса является лагранжевой функцией для координат q и гамильтоновой функцией для координат ξ. Система уравнений движения состоит из 2μ уравнений Гамильтона первого порядка и m уравнений Лагранжа второго порядка.

Функция Раусса употребляется в тех случаях, когда имеются циклические координаты. Если число циклических координат на единицу меньше числа степеней свободы, то интегрирование производится весьма просто при помощи закона сохранения энергии (см. § 18). При меньшем количестве циклических координат это невозможно. В этих случаях иногда удобно составить функцию Раусса, выбирая в качестве координат ξ циклические координаты. От самих координат ξ функция Раусса, конечно, зависеть не будет. Уравнения (53,7) не дают при этом ничего нового. Из $\dot{p}_\xi = 0$ следует $p_\xi = \text{const}$, что нам уже известно (см. § 18). Заменяя теперь в уравнениях движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(q, \dot{q}, p_\xi)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial R(q, \dot{q}, p_\xi)}{\partial q}, \tag{53,9}$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial R(q, \dot{q}, p_\xi)}{\partial p_\xi} \tag{53,10}$$

импульсы p_ξ, соответствующие циклическим координатам, их постоянными значениями, мы сводим, по существу, интегрирование уравнений движения к интегрированию системы уравнений (53,9), не содержащих других переменных кроме не циклических координат q и скоростей $\dot{q}$. Если q_i (а значит и $\dot{q}_i$) как функции от времени определены, то подставив их в правую часть уравнений (53,10), найдем простым интегрированием и циклические координаты ξ, как функции от времени.

Найдем еще выражение для энергии в переменных q, $\dot{q}$, ξ и p_ξ. Согласно определению энергии $E = \sum p\dot{q} + \sum p_\xi \dot{\xi} - L$. Подставляя функцию Раусса, находим

$$E = R + \sum p\dot{q} = R - \sum \dot{q}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}}. \tag{53,11}$$

Эта формула дает связь между энергией и функцией Раусса.

§ 54. Скобки Пуассона

Пусть f есть некоторая функция от координат, импульсов и времени

$$f = f(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t).$$

Составим полную производную от нее по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Если подставим сюда вместо $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ их выражения из уравнений Гамильтона $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, то мы получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right).$$

Выражение

$$(Hf)=\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \tag{54,1}$$

носит название *скобок Пуассона* для величин H и f. При помощи этих скобок получаем полную производную величины f в виде

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+(Hf). \tag{54,2}$$

Если функция f не зависит от времени явно, то $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ и

$$\frac{df}{dt}=(Hf). \tag{54,3}$$

Как уже было указано выше (см. § 7), интегралом уравнений движения называется такая функция переменных, определяющих состояние движения механической системы, которая остается постоянной в течение всего времени движения. Согласно уравнению (54,2) интеграл уравнений движения $f(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; t)$ должен удовлетворять тождеству

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(Hf)=0. \tag{54,4}$$

Если интеграл движения не зависит от времени явно, то он удовлетворяет тождеству

$$(Hf)=0. \tag{54,5}$$

Таким образом условие постоянства величины f, не зависящей от времени явно, состоит в том, что скобки Пуассона для функции Гамильтона и этой величины f должны обращаться в нуль.

Для любой пары величин f и g скобки Пуассона определяются аналогично (54,1):

$$(fg)=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right). \tag{54,6}$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами, которые легко выводятся из их определения.

Если переставить функции, то скобка переменит знак; если одна из функций — постоянная, то скобка равна нулю:

$$(fg)=-(gf), \tag{54,7}$$

$$(fc)=0. \tag{54,8}$$

Далее,

$$(f_1+f_2;\ g)=(f_1g)+(f_2g); \tag{54,9}$$

$$(f_1f_2,\ g)=f_1(f_2g)+(f_1g)f_2. \tag{54,10}$$

Взяв частную производную по времени от скобки Пуассона, получим из (54,6)

$$\frac{\partial}{\partial t}(fg)=\left(\frac{\partial f}{\partial t},\ g\right)+\left(f,\ \frac{\partial g}{\partial t}\right). \tag{54,11}$$

Если f есть какая-либо функция координат и импульсов, то

$$(fq_k) = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \tag{54,12}$$

$$(fp_k) = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{54,13}$$

Формулу (54,12), например, получим, полагая в (54,6) функцию g равной q_k. Вся сумма сведется при этом к одному члену, так как $\frac{\partial q_k}{\partial q_l} = \delta_{kl}$, а $\frac{\partial q_k}{\partial p_l} = 0$. Полагая в (54,12) и (54,13) функцию f равной сначала q_i, а затем p_i, получим

$$(q_i q_k) = 0, \quad (p_i p_k) = 0, \quad (p_i q_k) = \delta_{ik}. \tag{54,14}$$

Наконец, между скобками трех функций, взятых попарно, существует замечательное соотношение

$$(f(gh)) + (g(hf)) + (h(fg)) = 0. \tag{54,15}$$

Это равенство носит название *тождества Якоби*. Для вывода этого тождества заметим следующее. Согласно определению (54,6) скобка Пуассона (fg) является линейной однородной функцией производных первого порядка как от величины f, так и от величины g. Поэтому третья скобка в (54,15) представляет собой линейную однородную функцию производных второго порядка от f и g. Подобным же образом убеждаемся в том, что первая скобка в (54,15) есть линейная однородная функция производных второго порядка от g и h, а вторая от h и f. Таким образом левая сторона тождества (54,15) является линейной однородной функцией производных второго порядка от f, g и h. Соберем вместе члены, содержащие вторые производные от f. Первая скобка содержит только первые производные f. Вторую и третью можно, пользуясь (54,7), представить в виде

$$(g(hf)) + (h(fg)) = (g(hf)) - (h(gf)).$$

Вводя диференциальные операторы

$$D_1(\varphi) = (g\varphi), \quad D_2(\varphi) = (h\varphi),$$

можно члены, содержащие вторые производные от f, записать в виде

$$(g(hf)) - (h(gf)) = D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1) f.$$

Однако такая комбинация двух линейных диференциальных операторов никогда не содержит вторых производных. В самом деле, пусть (знак суммирования мы опускаем)

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k};$$

тогда

$$D_1 D_2 = \sum_{kl} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{kl} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_1 D_2 = \sum_{kl} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{kl} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Заметим, что первые суммы в обоих выражениях равны друг другу. Поэтому, составляя разность операторов D_1D_2 и D_2D_1, получим

$$D_1D_2 - D_2D_1 = \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_l},$$

т. е. снова оператор, содержащий только первые производные.

Таким образом в левую часть (54,15) не входят члены со вторыми производными от f, а так как то же самое относится к g и h, то и все выражение тождественно равно нулю.

Пусть $f = \text{const}$ и $g = \text{const}$ — два независимых интеграла движения. Тогда можно показать, что и скобки Пуассона, составленные из этих величин есть интеграл движения, т. е.

$$(fg) = \text{const}. \tag{54,16}$$

Это утверждение носит название *теоремы Пуассона.*

Допустим сначала, что функции f и g не зависят от времени явно. В этом случае доказательство весьма просто получается из рассмотрения тождества Якоби для трех величин: функции Гамильтона H, f и g. Имеем

$$(H(fg)) + (f(gH)) + (g(Hf)) = 0. \tag{54,17}$$

Принимая во внимание, что, согласно (54,5) $(Hf) = 0$ и $(Hg) = 0$, находим

$$(H(fg)) = 0,$$

откуда и следует (54,16).

Для доказательства теоремы Пуассона в общем случае, когда функции f и g могут зависеть от времени явно, рассмотрим полную производную по времени от скобок Пуассона.

На основании (54,2) имеем

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{\partial}{\partial t}(fg) + (H(fg)).$$

Воспользовавшись формулой (54,11) и заменив скобку $(H(fg))$ двумя другими при помощи тождества Якоби (54,15), получим

$$\frac{d}{dt}(fg) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\,g\right) + \left(f\,\frac{dg}{dt}\right) - (f(gH)) - (g(Hf)) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (Hf);\ g\right) + \left(f;\ \frac{\partial g}{\partial t} + (Hg)\right),$$

или

$$\frac{d}{dt}(fg) = \left(\frac{df}{dt},\ g\right) + \left(f,\ \frac{dg}{dt}\right). \tag{54,18}$$

Из этого соотношения видно, что если полные производные от величин f и g равны нулю, то равна нулю также полная производная от скобок Пуассона для этих величин. Это и доказывает теорему Пуассона.

Разумеется, применяя теорему Пуассона, мы не всегда получим новые интегралы движения, так как число их ограниченно (см. § 7). В некоторых случаях мы можем получить тривиальный результат — скобки Пуассона сведутся к постоянной. В других случаях вновь полученный интеграл может оказаться просто функцией исходных интегралов движения f и g. Если ни тот, ни другой случай места не имеют, то скобки Пуассона дают новый интеграл движения.

Как известно (см. § 12), для всякой замкнутой механической системы имеют место семь законов сохранения:

$$E=\text{const},\quad \mathbf{P}=\mathbf{const},\quad \mathbf{M}=\mathbf{const}.$$

Для систем, движущихся во внешнем поле, количество законов сохранения меньше. В частности их может и вовсе не быть. Теорема Пуассона указывает на связь между различными законами сохранения. Для нахождения этой связи, рассмотрим скобки Пуассона для компонент импульса и момента системы материальных точек.

В случае одной точки имеем

$$(p_xp_y)=0,\qquad (M_xp_y)=-\frac{\partial M_x}{\partial y}=-\frac{\partial(yp_z-zp_y)}{\partial y}=-p_z,$$

$$(M_xp_x)=0,\quad (M_xM_y)=\sum_l\left(\frac{\partial M_x}{\partial p_l}\frac{\partial M_y}{\partial q_l}-\frac{\partial M_x}{\partial q_l}\frac{\partial M_y}{\partial p_l}\right)=$$

$$=\frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial M_y}{\partial z}-\frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial M_y}{\partial p_z}=yp_x-x\;{}_y=-M_z.$$

Воспользовавшись циклической перестановкой, получим и остальные формулы. Легко видеть, что такие же соотношения имеют место и для скобок Пуассона, составленных из компонент импульса и момента системы материальных точек. Таким образом всегда

$$(P_xP_y)=0, \tag{54,19}$$

$$(M_xP_x)=0,\quad (M_xP_y)=-P_z,\quad (M_xP_z)=P_y, \tag{54,20}$$

$$(M_zM_y)=-M_x,\quad (M_xM_z)=-M_y,\quad (M_yM_x)=-M_z. \tag{54,21}$$

Из соотношений (54,21) мы видим, что если сохраняются две проекции момента, то сохраняется и третья. Комбинируя формулы (54,21) и (54,20), мы приходим к заключению, что одновременное наличие трех законов сохранения

$$M_x=\text{const},\quad M_y=\text{const},\quad P_z=\text{const}$$

влечет за собой законы сохранения всех компонент момента и импульса.

§ 55. Действие как функция координат

Возвратимся теперь к интегралу действия

$$S=\int\limits_1^2 L\,dt.$$

Мы знаем, что вариация этого интеграла, соответствующая изменению одной из обобщенных координат, может быть представлена в виде

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial\dot q}\,\delta q\,\Big|_1^2+\int\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)\delta q\,dt,$$

причем второй член справа, на основании принципа наименьшего действия, для всех действительных движений равен нулю.

В § 2, при выводе уравнений Лагранжа, мы сравнивали друг с другом величину интеграла действия, взятого вдоль действительного движения от A к B с величиной интеграла, взятого вдоль близкого к нему пути, причем начало A и конец B не варьировались (рис. 53). Соответственно этому мы полагали $(\delta q)_1 = (\delta q_2) = 0$. Найдем теперь приращение интеграла действия при переходе от движения AB к другому, также действительному движению AB', которое отличается от первого только бесконечно малым изменением конечных координат системы (рис. 54). Так как, при заданных внешних условиях, движение вполне определяется координатами начала и конца движения и так как мы изменяем только координаты конечной конфигурации системы, то и величина действия будет вполне определяться координатами конца движения. В этом смысле действие можно рассматривать как функцию верхнего предела интегрирования.

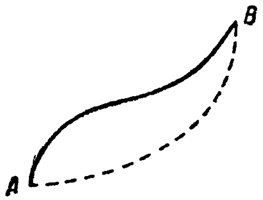


Рис. 53.

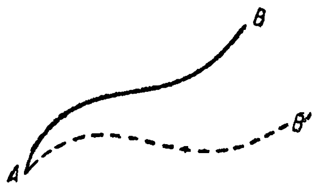


Рис. 54.

При изменении одной из конечных координат мы для приращения действия, положив $(\delta q)_1 = 0$ и $(\delta q_2) = \delta q$, получаем

$$\delta S = p\,\delta q. \tag{55,1}$$

Из этого соотношения следует, что частная производная от действия по координате равна соответствующему импульсу

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{55,2}$$

Если система имеет n степеней свободы, то

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ \ldots, \quad p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}. \tag{55,3}$$

Пусть $\mathbf{p}$ — импульс одной из материальных точек системы, а $\mathbf{r}$ — соответствующий этой точке радиус-вектор; тогда

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}. \tag{55,4}$$

Действие зависит не только от координат, но и от времени, так как движение AB', заканчивающееся с теми же координатами, что и движение AB, но в другой момент времени будет, конечно, другим. Частные производные от действия по координатам равны импульсам. Найдем теперь, чему равна частная производная от действия по времени.

Полная производная действия по времени вдоль траектории равна, очевидно,

$$\frac{dS}{dt}=L. \tag{55,5}$$

Рассматривая теперь действие как функцию координат и времени, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=L$$

или, заменив согласно (55,3) $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ на p_i,

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum p_i\dot{q}_i=L.$$

Однако согласно определению функции Гамильтона

$$\sum p_i\dot{q}_i-L=H.$$

Поэтому окончательное выражение для частной производной от действия по времени, имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H. \tag{55,6}$$

Сопоставляя формулы

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad -H=\frac{\partial S}{\partial t}, \tag{55,7}$$

мы видим, что энергия играет роль импульса по отношению к времени.

Воспользовавшись этим обстоятельством, можно уравнения Гамильтона привести к виду симметричному относительно координат и времени. Для этого представим выражение для функции Гамильтона через координаты, импульсы и время $H=H(q, p, t)$ в виде неявной функции $f(q, p, t, H)=0$ и найдем $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$.

По правилу диференцирования неявной функции имеем

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial H}}, \quad \frac{dp}{dt}=\frac{\frac{\partial f}{\partial q}}{\frac{\partial f}{\partial H}}. \tag{55,8}$$

С другой стороны, как было доказано выше [(52,6)], имеет место соотношение

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{55,9}$$

Определив dt из (55,8) и (55,9) и приравняв полученные выражения друг другу, найдем

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}}=\ldots=\frac{dq_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}}=\frac{dt}{-\frac{\partial f}{\partial H}}=\frac{dp_1}{-\frac{\partial f}{\partial q_1}}=\ldots=\frac{dp_n}{-\frac{\partial f}{\partial q_n}}=\frac{dH}{\frac{\partial f}{\partial t}}. \tag{55,10}$$

Это и есть *уравнения Гамильтона в симметричном виде*.

Вернемся теперь к приращению действия при переходе от одного движения к другому, бесконечно близкому движению.

Если изменяются все конечные координаты и время, то из (55,1) получим

$$\delta S = \sum p_i \delta q_i - H \delta t. \tag{55,11}$$

Предположим теперь, что изменяются не только координаты конца движения, но и координаты начала. В этом случае, положив $(\delta q)_1 = \delta q^0$ и $(\delta q)_2 = \delta q$, получим для приращения действия

$$\delta S = \left(\sum p_i \delta q_i - H \delta t\right)\Big|_1^2 = \sum p_i \delta q_i - \sum p_i^0 \delta q_i^0 + H_0 \delta t_0 - H \delta t. \tag{55,12}$$

Отсюда, помимо уравнений (55,3), имеем еще

$$\frac{\partial S}{\partial q_1^0} = -p_1^0, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial q_n^0} = -p_n^0; \quad \frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0. \tag{55,13}$$

Из соотношения (55,13) мы видим, между прочим, что уже принцип наименьшего действия дает возможность делать некоторые указания относительно свойств движения системы. В самом деле, из принципа наименьшего действия следует, что каково бы ни было внешнее воздействие на систему во время движения, конечное состояние ее не может быть произвольной функцией начального. Это видно из того, что движения возможны только такие, при которых правая часть равенства (55,12) является полным диференциалом. Таким образом уже самый факт наличия принципа наименьшего действия, независимо от конкретного вида функции Лагранжа, накладывает на совокупность возможных движений известное ограничение.

В частности, если мы имеем совокупность пучков частиц, разлетающихся из ряда точек пространства, то свойства этих пучков могут изменяться далеко не произвольным образом. При этом оказывается возможным установить ряд общих закономерностей, не зависящих от характера внешнего воздействия на эти пучки. Вопросами, связанными со свойствами таких пучков занимается отдел математической физики, называемый геометрической оптикой.

Как мы видели выше (55,5), частная производная по времени от функции действия связана с функцией Гамильтона соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0. \tag{55,14}$$

Если теперь в функции Гамильтона вместо импульсов подставить частные производные от действия по координатам, то получим диференциальное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) = 0. \tag{55,15}$$

Это уравнение в частных производных первого порядка, так как в него входят только первые производные от S; оно второй степени, так как производные по координатам, т. е. импульсы, входят в функцию Гамильтона квадратично.

Уравнение (55,15) известно под названием *диференциального уравнения Гамильтона-Якоби.*

Задачи

1. Написать уравнение Гамильтона-Якоби, если:

а) $L=\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}^2}{x}+\frac{\dot{y}^2}{y}\right)+\dot{x}\dot{y}$.

Отв. $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2(1-xy)}\left\{x\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+y\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2-2xy\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y}\right\}=0.$

б) $L=\frac{1}{2}[(1-v^2)\dot{u}^2+(1-u^2)\dot{v}^2]$.

Отв. $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-v^2}\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{1-u^2}\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2\right\}=0.$

в) $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Отв. $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+m^2c^2=0.$

2. Написать уравнения Лагранжа, если уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

а) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{v}\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2\right]=0.$

Отв. $v\ddot{u}+\dot{v}\dot{u}=\frac{\dot{v}^2}{2},\quad u\ddot{v}+\dot{u}\dot{v}=\frac{\dot{u}^2}{2}.$

б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}+ay\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}-ax\right)^2\right\}=0.$

Отв. $m\ddot{x}=2a\dot{y},\quad m\ddot{y}=-2a\dot{x}.$

§ 56. Различные формы принципа наименьшего действия

Подставляя для δS выражение (55,11), получим принцип наименьшего действия в виде:

$$\delta\int\left\{\sum p\,dq-H(q,\,p)\,dt\right\}=0. \tag{56,1}$$

Легко видеть, что варьируя здесь как координаты, так и импульсы, мы получим уравнения Гамильтона.

В самом деле, составим вариацию интеграла:

$$\delta S=\int\left\{\sum\delta p\,dq+\sum p\,\delta\,dq-\sum\frac{\partial H}{\partial q}\delta q\,dt-\sum\frac{\partial H}{\partial p}\delta p\,dt\right\}.$$

Преобразование второго члена интегрированием по частям, дает

$$\delta S=\sum\int\delta p\left(dq-\frac{\partial H}{\partial p}dt\right)+\sum p\,\delta q\Big|_1^2-\sum\int\delta q\left(dp+\frac{\partial H}{\partial q}dt\right).$$

На границах интегрирования мы должны положить $\delta q=0$, вследствие чего второй член пропадает. Оставшиеся интегралы могут равняться нулю при произвольных значениях δq и δp только в том случае, если подинтегральные выражения каждого из них равны нулю. Следовательно,

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},$$

т. е. мы действительно получаем канонические уравнения Гамильтона.

Рассмотрим теперь случай, когда функция Гамильтона не содержит времени явно. Как мы уже знаем, она при этом сохраняется и равна энергии системы

$$H(q,\ p) = E = \mathrm{const}.$$

Это дает нам возможность проинтегрировать вторую часть интеграла действия и написать

$$S = \int \sum p\, dq - E(t - t_0). \tag{56,2}$$

Первый член этой суммы

$$S_0 = \int \sum p\, dq \tag{56,3}$$

называют *укороченным действием* системы материальных точек.

Принцип наименьшего действия в рассматриваемом случае, когда энергия сохраняется, можно представить в виде

$$\delta \left\{ \int \sum p\, dq - E(t - t_0) \right\} = 0, \tag{56,4}$$

причем варьированию подлежат координаты и энергия. Импульсы должны быть выражены через координаты и диференциалы координат. Это можно сделать следующим образом.

На основании определения импульсов и сохранения энергии имеем $n+1$ равенств

$$p_k = \frac{\partial L\left(q,\ \frac{dq}{dt}\right)}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{56,5}$$

$$E\left(q,\ \frac{dq}{dt}\right) = E, \tag{56,6}$$

которые можно рассматривать как $n+1$ уравнений для $p_1, \ldots, p_n$ и dt. Определив из последнего уравнения dt через все q и dq, подставим полученное выражение в формулы (56,5). Энергия E при этом входит как параметр.

Варьируя в (56,4) по координатам и, учитывая, что второй член от координат не зависит, мы получаем

$$\delta S_0 = \delta \int \sum p\, dq = 0. \tag{56,7}$$

Поскольку импульсы p здесь предполагаются выраженными через координаты и их диференциалы, то в подинтегральное выражение время уже не входит явно. Уравнение (56,7) дает, таким образом, уравнение траекторий. Это уравнение носит название *принципа Мопертюи*.

Если же мы будем в (56,4) варьировать по энергии, то получим

$$\frac{\partial S_0}{\partial E}\, dE - (t - t_0)\, dE = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial S_0}{\partial E} = t - t_0. \tag{56,8}$$

В частном случае, когда кинетическая энергия является квадратичной функцией скоростей, выражения для энергии и импульса имеют вид (см. § 7)

$$E = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q), \tag{56,9}$$

$$p_i = g_{ik} q_k. \tag{56,10}$$

Напомним, что коэфициенты g_{ik} являются, вообще говоря, функциями координат. Решая уравнение (56,9) относительно диференциала времени, находим

$$dt = \sqrt{\frac{g_{ik}\, dq_i\, dq_2}{2(E-U)}}. \tag{56,11}$$

Поэтому

$$p_i\, dq_i = g_{ik} \frac{dq_k}{dt}\, dq_i = \sqrt{2(E-U)\, g_{ik}\, dq_i\, dq_k},$$

и укороченное действие принимает вид

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U)\, g_{ik}\, dq_i\, dq_k}. \tag{56,12}$$

Варьирование S_0 по координатам q непосредственно дает уравнение траектории. Диференцируя S_0 по энергии, мы видим, что уравнение (56,8) сводится к уравнению

$$\int \sqrt{\frac{g_{ik}\, dq_i\, dq_k}{2(E-U)}} = t - t_0,$$

которое представляет собой не что иное, как интеграл уравнения (56,9).

В случае одной материальной точки

$$T = \frac{1}{2} g_{ik} \frac{dq_i\, dq_k}{dt^2} = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

и мы можем написать

$$\delta \int_0^s \sqrt{2m(E-U)}\, ds = 0. \tag{56,13}$$

В таком виде принцип наименьшего действия был представлен Якоби.

Если на точку не действуют никакие силы, то $U = 0$ и принцип наименьшего действия сводится к равенству

$$\delta \int_0^s ds = 0. \tag{56,14}$$

Это означает, что материальная точка будет двигаться по кратчайшему пути, т. е. по прямой линии.

§ 57. Канонические преобразования

До сих пор под обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ мы понимали n каких-либо величин, описывающих положение механической системы. Уравнения механики сохраняют каноническую форму независимо от конкретного выбора этих величин, т. е. при любых преобразованиях от одних пространственных координат к другим.

Иногда представляется целесообразным пользоваться в качестве новых координат функциями не только старых координат, но и старых импульсов:

$$Q_i = Q_i(q, p, t). \tag{57,1}$$

При этом, вообще говоря, форма уравнений движения изменится. Однако, в ряде случаев уравнения могут сохранить гамильтонову форму. *Каноническими* называются такие преобразования, которые дают возможность перейти от импульсов p и координат q к другим импульсам P и координатам Q так, чтобы эти новые импульсы и координаты удовлетворяли каноническим уравнениям Гамильтона.

К формулам для канонических преобразований мы можем притти следующим путем. В предыдущем параграфе мы видели, что канонические уравнения представляют собой прямое следствие принципа наименьшего действия, написанного в форме

$$\delta \int \left\{ \sum p\,dq - H\,dt \right\} = 0. \tag{57,2}$$

Для того чтобы новые импульсы P и координаты Q опять удовлетворяли уравнениям Гамильтона, необходимо, чтобы они также удовлетворяли принципу наименьшего действия

$$\delta \int \left\{ \sum P\,dQ - H'\,dt \right\} = 0, \tag{57,3}$$

где через H' мы обозначили новую функцию Гамильтона.

Так как варьирование производится по координатам и импульсам, то принцип наименьшего действия (57,3) будет эквивалентным принципу наименьшего действия (57,2) только в том случае, если подинтегральное выражение в (57,3) будет отличаться от подинтегрального выражения в (57,2) не более, чем на полный диференциал от произвольной функции координат импульсов и времени. Обозначая ее через f, имеем

$$\sum p\,dq - H\,dt = \sum P\,dQ - H'dt + df. \tag{57,4}$$

Из этого соотношения видно, что не всякую систему функций координат и импульсов можно выбрать в качестве новых координат. Для того чтобы это можно было сделать, должна существовать функция f такая, чтобы удовлетворялось соотношение (57,4). Функция f, характеризующая каноническое преобразование, носит название производящей функции.

Определив из (57,4) диференциал производящей функции, получим

$$df = \sum p\,dq - \sum P\,dQ + (H' - H)\,dt, \tag{57,5}$$

откуда

$$p = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial f}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{57,6}$$

Эти уравнения и дают связь между старыми и новыми величинами. Задавшись определенным преобразованием (57,1), подставляем, прежде всего, в первое из уравнений (57,6) вместо p его выражение через q, Q и t — из (57,1). Интегрируя полученные уравнения найдем производящую функцию f. Затем при помощи второго уравнения, совместно с уравнением (57,1), выразим q и P через Q и P. Наконец из третьего уравнения определяем новую функцию Гамильтона.

В виде примера рассмотрим линейный гармонический осциллятор. В переменных q и p его функция Гамильтона имеет вид:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2q^2}{2}.$$

Введем новые переменные Q и P, положив $Q=\operatorname{arctg}\frac{m\omega q}{p}$. Согласно (57,6) имеем

$$p=m\omega q\operatorname{ctg}Q=\frac{\partial f}{\partial q},$$

откуда

$$f=\frac{m\omega q^2}{2}\operatorname{ctg}Q.$$

Теперь определяем P:

$$P=-\frac{\partial f}{\partial Q}=\frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}.$$

Таким образом

$$q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q,\quad p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q. \tag{57,7}$$

Функция Гамильтона преобразуется в

$$H'=\omega P. \tag{57,8}$$

Следует иметь в виду, что указанное выше интегрирование уравнений (57,6) в случае многих степеней свободы при произвольном выборе преобразования (57,1) невозможно. Преобразования (57,1) могут быть каноническими только в тех случаях, когда это интегрирование возможно.

Часто бывает удобно в качестве независимых переменных выбирать не старые и новые координаты, а старые координаты и новые импульсы. Из уравнения (57,5) видно, что для этого следует произвести преобразование Лежандра и ввести вместо f новую производящую функцию. В этом случае мы имеем

$$d\left(f+\sum PQ\right)=\sum p\,dq+\sum Q\,dP+(H'-H)\,dt.$$

Функция, стоящая под знаком диференциала в левой части этого равенства, и является новой производящей функцией. Обозначим ее через φ. Тогда из соотношения

$$d\varphi=\sum p\,dq+\sum Q\,dP+(H'-H)\,dt, \tag{57,9}$$

получим

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial q},\quad Q=\frac{\partial\varphi}{\partial P},\quad H'=H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{57,10}$$

Производящая функция φ в этом случае, как и раньше, определяется интегрированием первого уравнения.

Аналогичным образом можно перейти к каноническим преобразованиям с производящей функцией, зависящей от p и Q или от p и P. Однако такие преобразования встречаются реже.

Если функции f и φ не зависят от времени явно, то из (57,6) и (57,10) следует

$$H' = H. \tag{57,11}$$

Таким образом в этом случае функция Гамильтона не меняется и для получения новой функции достаточно подставить в старую функцию Гамильтона величины p и q, выраженные через P и Q (при этом вид функции Гамильтона, конечно, меняется).

Канонические уравнения обладают известной симметрией по отношению к координатам и импульсам. При помощи канонических преобразований можно даже произвести перестановку этих величин. В самом деле, если мы возьмем импульсы p за новые координаты, а q — в качестве новых импульсов, то это преобразование будет каноническим, так как уравнения Гамильтона сохранят свою форму.

На этом основании величины q и p называются иногда не импульсами и координатами, а просто *канонически сопряженными величинами*, или *канонически сопряженными переменными*.

При помощи канонических преобразований выбор координат становится еще более разнообразным, чем преобразование обобщенных пространственных координат.

Интересно отметить, что само движение можно рассматривать как каноническое преобразование. Пусть q_t и p_t — значения канонических переменных в момент времени t. Значения этих переменных в момент времени $t+\tau$ обозначим через $q_{t+\tau}$ и $p_{t+\tau}$, причем эти новые переменные являются некоторыми функциями q_t, p_t и τ:

$$q_{t+\tau} = q\,(q_t, p_t;\ \tau),$$
$$p_{t+\tau} = p\,(q_t, p_t;\ \tau).$$

Если мы будем рассматривать эти формулы как преобразование $q_t, p_t \to q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$, то это преобразование будет каноническим. Это следует из того, что величины $p_{t+\tau}$ и $q_{t+\tau}$, удовлетворяют каноническим уравнениям.

Скобки Пуассона обладают свойством инвариантности по отношению к каноническим преобразованиям. Иными словами, если мы обозначим через $(AB)_{qp}$ скобки Пуассона, в которых диференцирование предполагается по q и p, и рассмотрим две пары канонических переменных: q, p и Q, P, то:

$$(AB)_{qp} = (AB)_{QP}. \tag{57,12}$$

Для доказательства этой теоремы заметим, прежде всего, что в канонических преобразованиях, т. е. в (57,1) время играет роль параметра. Поэтому если мы докажем эту теорему для случая канонического преобразования, не зависящего от времени, то она будет верна и вообще. Рассмотрим теперь некоторое фиктивное движение, для которого B является функцией Гамильтона. Тогда, как это видно из формулы (54,3), $(AB)_{pq}=\frac{dA}{dt}$. Так как это выражение может зависеть только от свойств движения, а не от специального выбора переменных, то значение скобки Пуассона (AB) при произвольном выборе канонических переменных измениться не может.

Из формулы (54,14) и теоремы (57,12) непосредственно получим

$$(Q_m Q_n)_{pq}=0, \quad (P_m P_n)_{pq}=0, \quad (P_m Q_n)=\delta_{mn}. \tag{57,13}$$

Отсюда видно, каким условиям должны удовлетворять новые переменные Q и P для того чтобы преобразование $q, p \to Q, P$ было каноническим. Эти условия являются необходимыми и достаточными.

Допустим, что от канонических переменных $q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n$ мы переходим к новым каноническим переменным $Q_1, \ldots, Q_n; P_1, \ldots, P_n$. Якобиан соответствующего канонического преобразования равен единице. Для того, чтобы убедиться в этом, выберем в качестве независимых переменных старые координаты и новые импульсы, т. е. величины q и P. Воспользуемся известным свойством якобианов, которое позволяет обращаться с ними как с дробями. „Разделив числитель и знаменатель" на $\partial(q_1, \ldots, q_n; P_1, \ldots, P_n)$, получим

$$\frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n; P_1, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}=\frac{\dfrac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n; P_1, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n; P_1, \ldots, P_n)}}{\dfrac{\partial(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n; P_1, \ldots, P_n)}}.$$

Как известно, якобиан, у которого вверху и внизу имеются одни и те же величины, сводится к якобиану от меньшего числа переменных, причем выпавшие одинаковые величины считаются постоянными. Поэтому

$$\frac{\dfrac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n)}}{\dfrac{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n, P_1, \ldots, P_n)}}=\frac{\left\{\dfrac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n)}\right\}_{P=\mathrm{const}}}{\left\{\dfrac{\partial(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(P_1, \ldots, P_n)}\right\}_{q=\mathrm{const}}}.$$

Рассмотрим якобиан, стоящий в числителе. i, k-й элемент этого определителя равен $\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k}$. Из формулы (57,10) следует, что это выражение равно $\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_k \partial P_i}$. Таким же образом находим, что i, k-й элемент определителя в знаменателе равен $\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial P_k}$. Сравнивая оба выражения, мы видим, что определители отличаются друг от друга только заменой строк на столбцы и обратно. Поэтому определители равны друг другу и отношение их равно единице:

$$\frac{\left\{\dfrac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n)}{\partial(q_i, \ldots, q_n)}\right\}_{P=\mathrm{const}}}{\left\{\dfrac{\partial(p_1, \ldots, p_n)}{\partial(P_1, \ldots, P_n)}\right\}_{q=\mathrm{const}}}=\frac{\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_k \partial P_i}\right|}{\left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial P_k}\right|}=1.$$

Таким образом мы убедились, что, действительно, при каноническом преобразовании якобиан равен единице:

$$\frac{\partial(Q_1, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n)}{\partial(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)} = 1. \qquad (57,14)$$

§ 58. Уравнение Гамильтона-Якоби

Мы рассмотрели выше два метода интегрирования диференциальных уравнений механики: интегрирование n уравнений второго порядка (уравнений Лагранжа) и $2n$ уравнений первого порядка (канонических уравнений). Существует и третий метод. Оказывается, что нахождение общего интеграла уравнений движений может быть сведено к интегрированию одного диференциального уравнения в частных производных, а именно уравнения Гамильтона-Якоби (55,15):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) = 0. \qquad (58,1)$$

Диференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции. Такое решение уравнения называется его общим интегралом. Однако наибольшее значение имеет так называемый полный интеграл, т. е. интеграл, содержащий столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных. Полных интегралов существует бесконечное множество, однако, если известен хоть один полный интеграл, то можно определить и общий интеграл.

В уравнении Гамильтона-Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому полный интеграл его для системы с n степенями свободы должен содержать $n+1$ независимых произвольных постоянных. При этом, так как функция S в уравнение входит только через свои производные, то одна из произвольных постоянных входит аддитивно. Таким образом полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби имеет вид

$$S = f(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + A,$$

где A — произвольная постоянная.

Для того чтобы получить общий интеграл, будем A считать произвольной функцией остальных произвольных постоянных:

$$S = f(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + A(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \qquad (58,2)$$

Заменив здесь α_i функциями от координат и времени, которые получим из условий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (58,3)$$

получим общий интеграл.

В самом деле, на основании последних равенств, имеем

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha + \sum_k \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\right)_q \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha. \qquad (58,4)$$

Величины $\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right)_\alpha$ удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби, поскольку мы предположили, что $S(q;\ \alpha;\ t)$ есть полный интеграл этого уравнения. Равенство (58,4) показывает, что и $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ удовлетворяет ему

Получаемый таким путем общий интеграл зависит от выбора произвольной функции A. Мы не будем доказывать, что это — общий, а не частный интеграл.

Рассмотрим теперь связь между полным интегралом (58,2) уравнения Гамильтона-Якоби и общим интегралом уравнений движения. Для этого произведем каноническое преобразование от величин $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ к новым переменным, причем функцию $f(t; q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ возьмем в качестве производящей функции, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — в качестве новых импульсов. Новые координаты обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Функция f зависит, таким образом, от старых координат и новых импульсов и поэтому мы должны пользоваться формулами (57,10).

Так как производящая функция f удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби, то новая функция Гамильтона обращается в нуль:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Отсюда следует, что канонические уравнения для новых переменных имеют вид $\dot{\alpha}_i = 0$, $\dot{\beta}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, откуда находим, что

$$\alpha_i = \mathrm{const}, \quad \text{и} \quad \beta_i = \mathrm{const}. \qquad (58,5)$$

С другой стороны так как β_k — новые координаты, то по формулам канонических преобразований [см. (57,10)] имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \beta_k.$$

Последнее уравнение дает возможность выразить координаты $q_1, \ldots, q_n$ через время и новые переменные α_k и β_k, которые, как только что было доказано, постоянны.

Таким образом общий интеграл уравнений движения может быть получен из уравнения Гамильтона-Якоби следующим образом.

Составляется функция Гамильтона и затем уравнение Гамильтона-Якоби. Находится полный интеграл S этого уравнения, диференцируется по произвольным постоянным и результат приравнивается новым произвольным постоянным:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k. \qquad (58,6)$$

Решая полученную таким образом систему алгебраических уравнений, находят координаты q_i как функции от времени и произвольных постоянных, т. е. общий интеграл уравнений движения. Зависимость импульсов p_i от времени находится теперь из $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$.

Допустим, что мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, зависящий от меньшего числа произвольных постоянных, например, от одной. Полностью проинтегрировать уравнения мы в этом случае не можем. Однако поскольку можно предположить, что неполный интеграл получается из полного заменой всех произвольных постоянных, кроме одной, некоторыми определенными значениями, то мы можем все же утверждать, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\text{const}. \tag{58,7}$$

Таким образом мы получаем одно уравнение, связывающее $q_1, \ldots, q_n$ и t.

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает несколько более простую форму в том случае, когда функция H не зависит от времени явно, иными словами, когда энергия сохраняется. В этом случае мы с удобством можем заменить функцию S укороченным действием S_0. Для этого решения уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q;\ \frac{\partial S}{\partial q}\right)=0 \tag{58,8}$$

мы будем искать в виде

$$S(q, t)=S_0(q)-Et. \tag{58,9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (58,8), получим

$$H\left(q_1, \ldots, q_n;\ \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)=E. \tag{58,10}$$

Это и есть уравнение Гамильтона-Якоби в случае, когда энергия сохраняется.

§ 59. Разделение переменных

Общего способа интегрирования уравнения Гамильтона-Якоби не существует. Однако в ряде случаев нахождение полного интеграла может быть легко достигнуто путем расчленения уравнения на несколько независимых друг от друга уравнений.

В неявном виде уравнение Гамильтона-Якоби можно представить в виде

$$\Phi\left\{q,\ t,\ \frac{\partial S}{\partial q},\ \frac{\partial S}{\partial t}\right\}=0.$$

Допустим, что какая-либо координата, — обозначим ее через q_n — и соответствующая ей производная $\frac{\partial S}{\partial q_n}$ входят только в виде некоторой комбинации $\varphi\left(q_n, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)$, т. е. что уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\Phi\left\{q_i,\ t,\ \frac{\partial S}{\partial q_i},\ \frac{\partial S}{\partial t},\ \varphi\left(q_n, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)\right\}=0, \tag{59,1}$$

где через q_i мы обозначили совокупность всех координат, кроме q_n.

Решение уравнения в этом случае будем искать в виде суммы двух функций, из которых одна зависит от времени и всех координат кроме q_n, а другая — только от q_n:

$$S(q, t)=S'(q_i, t)+\chi(q_n). \tag{59,2}$$

Подставив это выражение в уравнение (59,1), получим

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_n, \frac{d\chi}{dq_n}\right)\right\} = 0.$$

Предположим, что искомое решение (59,2) найдено. Тогда после подстановки его в последнее уравнение, это уравнение обратится в тождество, которое, в частности, должно иметь место для всех значений координаты q_n. Однако при изменении q_n меняться может только функция φ. Других изменений при этом в левой части тождества не произойдет. Отсюда следует, что и функция φ не должна меняться, т. е. должна быть равна постоянной. Таким образом мы видим, что уравнение (59,1) распадается на два уравнения:

$$\varphi\left(q_n; \frac{d\chi}{dq_n}\right) = \alpha, \qquad (59,3)$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha\right\} = 0. \qquad (59,4)$$

Из уравнения (59,3) функция $\chi(q_n)$ может быть определена простым интегрированием. При этом α войдет как произвольная постоянная. Так как S' зависит еще от $n-1$ произвольных постоянных, то, найдя решение уравнения (59,4), мы получим полный интеграл (59,2) уравнения (59,1). Таким образом нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби с n координатами мы свели к интегрированию уравнения с $n-1$ координатой. Изложенный метод называется *методом разделения переменных.*

Если можно последовательно отделить $n-1$ координат и время, то, очевидно, нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби сводится к квадратурам. Как видно из формулы (59,2), укороченное действие S_0 в этом случае распадается на сумму отдельных функций $S_k(q_k)$, каждая из которых зависит только от одной координаты q_k. Таким образом в случае разделения всех переменных в уравнении Гамильтона-Якоби для консервативной системы:

$$S = \sum_k S_k(q_k; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, t. \qquad (59,5)$$

Частным случаем разделения переменных является случай циклической переменной. Функция $\varphi\left(q_n, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)$ сводится при этом просто к $\frac{\partial S}{\partial q_n}$ и мы можем уравнение (59,3) написать в виде $\frac{d\chi}{dq_n} = \alpha$, откуда $\chi = \alpha q_n$ и

$$S = S' - \alpha q_n. \qquad (59,6)$$

В частности, если система консервативна, то время явно не входит в уравнение Гамильтона-Якоби. В этом случае мы можем поступить так, как если бы время t являлось циклической переменной. Соответственно этому мы и искали решение уравнения Гамильтона-Якоби в виде $S = S_0(q) - Et$. Это вполне соответствует методу разделения переменных, причем роль переменной q_n играет здесь время t.

Таким образом мы видим, что все рассмотренные нами ранее случаи упрощения интегрирования уравнений движения охватываются методом разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби. К ним добавляется еще ряд случаев, когда разделение переменных возможно, хотя координаты не являются циклическими. Поэтому интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби является могущественным методом нахождения общего интеграла уравнений движения.

Приведем некоторые примеры разделения переменных.

1. В декартовых координатах функция Гамильтона для материальной точки, энергия которой сохраняется, имеет вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x, y, z).$$

Разделение переменных происходит, очевидно, в том случае, если потенциальная энергия имеет вид суммы трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты:

$$U = a(x) + b(y) + c(z). \tag{59,7}$$

В дальнейшем мы для удобства будем обозначать производные от S или S_0 по координатам так же, как и соответствующие импульсы.

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет в рассматриваемом случае вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + a(x) + b(y) + c(z) = 0.$$

При помощи подстановки $S = S_0 - Et$, отделив время, получим уравнение Гамильтона-Якоби для функции S_0:

$$\frac{p_x^2}{2m} + a(x) + \frac{p_y^2}{2m} + b(y) + \frac{p_z^2}{2m} + c(z) = E.$$

Положив здесь

$$S_0(x, y, z) = S_1(x) + S_2(y) + S_3(z),$$

получим три уравнения

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + a(x) = \alpha,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_2}{dy}\right)^2 + b(y) = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_3}{dz}\right)^2 + c(z) = \gamma,$$

причем произвольные постоянные α, β, γ связаны соотношением

$$\alpha + \beta + \gamma = E.$$

Решив эти уравнения, составим функцию S_0, а затем и S. В результате получим

$$S = \int \sqrt{2m(\alpha - a(x))}\,dx + \int \sqrt{2m(\beta - b(y))}\,dy + \\ + \int \sqrt{2m(\gamma - c(z))}\,dz - (\alpha + \beta + \gamma)t. \tag{59,8}$$

Это и есть полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби. Никаких новых результатов мы в этом случае не получим, так как, приравнивая результат диференцирования по α новой произвольной постоянной, мы придем к уравнению для одной степени свободы, которое мы уже имели выше. Тривиален и самый факт разделения переменных в рассмотренном случае, так как функции Лагранжа и Гамильтона распадаются на сумму отдельных функций.

2. В цилиндрических координатах функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_z^2+p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right)+U(z, \rho, \varphi).$$

Разделение переменных возможно в том случае, когда потенциальная энергия имеет вид

$$U=a(z)+b(\rho)+\frac{c(\varphi)}{\rho^2}. \tag{59,9}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для функции S_0 можно тогда записать так:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2+a(z)+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \rho}\right)^2+b(\rho)+\frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2+2mc(\varphi)}{2m\rho^2}=E.$$

Координаты z и φ отделяются сразу. Положив

$$S_0(z, \rho, \varphi)=S_1(z)+S_2(\varphi)+S_3(\rho),$$

получим три уравнения:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dz}\right)^2+a(z)=\alpha,$$

$$\left(\frac{dS_2}{d\varphi}\right)^2+2mc(\varphi)=\gamma,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_3}{d\rho}\right)^2+b(\rho)+\frac{\gamma}{2m\rho^2}=\beta.$$

Решив эти уравнения, найдем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$S=\int\sqrt{2m[\alpha-a(z)]}\,dz+\int\sqrt{\gamma-2mc(\varphi)}\,d\varphi+$$
$$+\int\sqrt{2m[\beta-b(\rho)]-\frac{\gamma}{\rho^2}}\,d\rho-(\alpha+\beta)t. \tag{59,10}$$

Продиференцировав S по α, β и γ и приравнивая результат диференцирования новым произвольным постоянным, найдем общий интеграл уравнений движения.

3. Рассмотрим еще случай сферических координат. Функция Гамильтона в сферических координатах имеет вид

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\vartheta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}\right)+U(r, \vartheta, \varphi).$$

Разделение переменных в сферических координатах возможно, если потенциальная энергия имеет вид

$$U = a(r) + \frac{b(\vartheta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\vartheta}. \tag{59,11}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает в этом случае вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial\vartheta}\right)^2 + 2mb(\vartheta)}{2mr^2} + \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial\varphi}\right)^2 + 2mc(\varphi)}{2mr^2\sin^2\vartheta} = E.$$

Из этого уравнения ясно, что прежде всего следует отделить координату φ. Положив $S_0(r, \vartheta, \varphi) = S_1(\varphi) + f(r, \vartheta)$, получим два уравнения

$$\left(\frac{dS_1}{d\varphi}\right)^2 + 2mc(\varphi) = \alpha,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right)^2 + 2mb(\vartheta) + \frac{\alpha}{\sin^2\vartheta}\right] = E.$$

Теперь отделяем координату ϑ. Пусть $f(r, \vartheta) = S_2(\vartheta) + S_3(r)$, тогда

$$\left(\frac{dS_2}{d\vartheta}\right)^2 + 2mb(\vartheta) + \frac{\alpha}{\sin^2\vartheta} = \beta,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_3}{dr}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$S = \int\sqrt{\alpha - 2mc(\varphi)}\,d\varphi + \int\sqrt{\beta - 2mb(\vartheta) - \frac{\alpha}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta + \int\sqrt{2m[E - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}}\,dr - Et. \tag{59,12}$$

Произвольными постоянными здесь являются α, β и E.

§ 60. Параболические координаты

В предыдущем параграфе мы рассмотрели разделение переменных уравнения Гамильтона-Якоби в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Помимо этих координат, для метода отделения переменных наибольшее значение имеют параболические и эллиптические координаты.

Рассмотрим сначала случай плоского движения материальной точки. Параболические координаты на плоскости связаны с декартовыми координатами x и y соотношением

$$x + iy = \frac{(\sqrt{\xi} + i\sqrt{\eta})^2}{2}, \tag{60,1}$$

откуда следует, что

$$x = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad y = \sqrt{\xi\eta}. \tag{60,2}$$

Составим прежде всего функцию Гамильтона в параболических координатах. Диференцируя (60,1) по времени, имеем

$$\dot{x}+i\dot{y}=(\sqrt{\xi}+i\sqrt{\eta})\left(\frac{\dot{\xi}}{2\sqrt{\xi}}+i\frac{\dot{\eta}}{2\sqrt{\eta}}\right).$$

Взяв квадрат модуля этого выражения, получим

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{4\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{4\eta}\right).$$

Поэтому функция Лагранжа есть

$$L=\frac{m}{8}(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)-U(\xi,\eta).$$

Импульсы равны

$$p_\xi=\frac{m}{4\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi},\quad p_\eta=\frac{m}{4\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta},$$

и функция Гамильтона

$$H=\frac{2}{m}\,\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+U(\xi,\eta). \tag{60,3}$$

Параболические координаты ξ и η, очевидно, разделяются в том случае, если потенциальная энергия имеет вид

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}. \tag{60,4}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для функции S_0 можно в этом случае записать так:

$$\frac{2}{m}\,\frac{\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2}{\xi+\eta}+\frac{a(\xi)+b(U)}{\xi+\eta}=E. \tag{60,5}$$

Приводя к общему знаменателю и сгруппировав соответствующие члены, получим

$$2\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi+2\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta=0.$$

Первые три слагаемых в левой части этого уравнения зависят только от ξ, а остальные три — от η. Положив $S_0(\xi,\eta)=S_1(\xi)+S_2(\eta)$ и вводя произвольную постоянную α, получим два уравнения

$$2\xi\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-mE\xi=\alpha,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-mE\eta=-\alpha.$$

Проинтегрировав эти уравнения, найдем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$S=\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\alpha}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}}\,d\xi+$$

$$+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{\alpha}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}}\,d\eta-Et. \tag{60,6}$$

Произвольными постоянными являются здесь α и E.

Для того чтобы выяснить геометрическое значение параболических координат ξ и η, найдем выражение для $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Определяя квадрат модуля (60,1), имеем

$$r^2=x^2+y^2=\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2;$$

откуда

$$r=\frac{\xi+\eta}{2}.$$

Определяя из двух уравнений

$$x=\frac{\xi-\eta}{2}, \quad r=\frac{\xi+\eta}{2}$$

ξ и η, находим

$$\xi=r+x, \quad \eta=r-x. \tag{60,7}$$

Подставляя эти выражения в (60,4), мы видим, что разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, в параболических координатах возможно в том случае, когда потенциальная энергия имеет вид

$$U=\frac{A(r+x)+B(r-x)}{r}. \tag{60,8}$$

В пространственном случае в качестве переменных можно взять параболические координаты на плоскости [см. формулу (60,1)] и декартову координату z. Существует, однако, и ряд других случаев, когда разделение переменных в параболических координатах возможно. К ним мы приходим, переходя к параболическим координатам не от декартовых, а от цилиндрических координат z, ρ и φ.

Функция Лагранжа в цилиндрических координатах имеет вид

$$L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(\rho, \varphi, z).$$

Введем параболические координаты ξ и η при помощи соотношения

$$z+i\rho=\frac{(\sqrt{\xi}+i\sqrt{\eta})^2}{2}. \tag{60,9}$$

Поступая как выше, получим функцию Лагранжа в новых переменных

$$L=\frac{m}{8}(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)+\frac{m}{2}\xi\eta\dot{\varphi}^2-U(\xi, \eta, \varphi). \tag{60,10}$$

Составляя функцию Гамильтона, находим

$$H=\frac{2}{m}\,\frac{\xi p_\xi^2+\eta p_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi, \eta, \varphi). \tag{60,11}$$

Отсюда видно, что переменные отделяются, если потенциальная энергия имеет вид

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}+\frac{c(\varphi)}{\xi\eta}. \tag{60,12}$$

В уравнении Гамильтона-Якоби

$$\frac{2}{m}\frac{\xi\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right)^2}{\xi+\eta}+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}+\frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2+2mc(\varphi)}{2m\xi\eta}=E \qquad (60,13)$$

прежде всего отделяется координата φ.

Положим

$$S_0(\xi,\eta,\varphi)=S_1(\varphi)+f(\xi,\eta).$$

Тогда из (60,13) получим два уравнения:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right)^2+2mc(\varphi)=\alpha,$$

$$\frac{2}{m}\frac{\xi\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}{\xi+\eta}+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}+\frac{\alpha}{2m\xi\eta}=E.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $m(\xi+\eta)$ и сгруппировав соответствующим образом слагаемые, приведем его к виду

$$2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2+ma(\xi)+\frac{\alpha}{2\xi}-mE\xi+2\eta\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2+mb(\eta)+\frac{\alpha}{2\eta}-mE\eta=0.$$

Полагая здесь

$$f(\xi,\eta)=S_2(\xi)+S_3(\eta)$$

и вводя новую произвольную постоянную β, получим еще два уравнения:

$$2\xi\left(\frac{dS_2}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)+\frac{\alpha}{2\xi}-mE\xi=\beta,$$

$$2\eta\left(\frac{dS_3}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)+\frac{\alpha}{2\eta}-mE\eta=-\beta.$$

Проинтегрировав все эти уравнения, получим

$$S=\int\sqrt{\alpha-2mc(\varphi)}\,d\varphi+\int\sqrt{\frac{mE}{2}+\frac{\beta}{2\xi}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{\alpha}{4\xi^2}}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{\frac{mE}{2}-\frac{\beta}{2\eta}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{\alpha}{4\eta^2}}\,d\eta-Et. \qquad (60,14)$$

Произвольных постоянных здесь три — α, β и E. Из (60,9) легко видеть, что

$$\xi=r+z, \quad \eta=r-z, \qquad (60,15)$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Поэтому общее выражение для потенциальной энергии, при которой возможно рассмотренное выше отделение переменных, имеет вид

$$U=\frac{A(r+z)+B(r-z)}{r}+\frac{c(\varphi)}{\rho^2}, \qquad (60,16)$$

где $\rho^2=x^2+y^2$, а A и B — две произвольные функции. Функцией этого типа является, в частности, функция

$$U=\frac{A}{r}, \qquad (60,17)$$

где A — постоянная.

Выше [(59,11)] мы видели, что при движении в поле с центральной симметрией всегда возможно разделение переменных в сферических координатах. Теперь мы видим, что в случае кулоновского поля разделение переменных выполнимо и в параболических координатах.

Другим частным случаем, когда разделение переменных возможно, является случай однородного силового поля, при котором

$$U = -Fz. \tag{60,18}$$

Для этого надо положить

$$A(r+z) = -\frac{F(r+z)^2}{4}, \quad B(r-z) = \frac{F(r-z)^2}{4}.$$

Сопоставляя (60,17) и (60,18), мы приходим к заключению, что в параболических координатах можно интегрировать и комбинацию кулоновского и однородного полей, чего нельзя сделать в сферических координатах.

Приведем выражение для S в случае, когда

$$U = \frac{A}{r} - Fz. \tag{60,19}$$

При помощи соотношений

$$r = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad z = \frac{\xi-\eta}{2},$$

выразим потенциальную энергию через ξ и η:

$$U = \frac{A}{r} - Fz = \frac{2A}{\xi+\eta} - \frac{F}{2}(\xi-\eta) = \frac{\left(A - \frac{F}{2}\xi^2\right) + \left(A + \frac{F}{2}\eta^2\right)}{\xi+\eta}.$$

Проделав вычисления так, как это было сделано выше в общем случае, получим

$$S = \sqrt{\alpha}\varphi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{mA-\beta}{2\xi} - \frac{\alpha}{4\xi^2} + \frac{mF\xi}{4}}\, d\xi + \\ + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{mA+\beta}{2\eta} - \frac{\alpha}{4\xi^3} - \frac{mF\xi}{4}}\, d\eta - Et. \tag{60,20}$$

Произвольными постоянными и здесь являются α, β и E. Оба интеграла эллиптические.

§ 61. Эллиптические координаты

В случае плоского движения эллиптические координаты ξ и η вводятся при помощи соотношения

$$x + iy = \sigma \operatorname{ch}(\xi + i\eta). \tag{61,1}$$

Постоянная σ является параметром преобразования.

Для нахождения функции Гамильтона будем поступать так, как и в предыдущем параграфе. Продиференцировав (61,1) по времени, мы получим

$$\dot{x} + i\dot{y} = \sigma(\dot{\xi} + i\dot{\eta}) \operatorname{sh}(\xi + i\eta).$$

Взяв квадрат модуля этого выражения, получим

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\sigma^2(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)\,|\operatorname{sh}(\xi+i\eta)|^2.$$

Это выражение легко упростить. По формулам гиперболической тригонометрии имеем

$$|\operatorname{sh}(\xi+in)|^2=\operatorname{sh}(\xi+i\eta)\operatorname{sh}(\xi-i\eta)=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta).$$

Воспользовавшись формулами для функции удвоенного аргумента, получим

$$|\operatorname{sh}(\xi+i\eta)|^2=\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta.$$

Функция Лагранжа в эллиптических координатах имеет, следовательно, вид

$$L=\frac{m\sigma^2}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta)-U(\xi,\eta). \tag{61,2}$$

Поэтому функция Гамильтона есть

$$H=\frac{1}{2m\sigma^2}\,\frac{p_\xi^2+p_\eta^2}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}+U(\xi,\eta). \tag{61,3}$$

Отсюда видно, что разделение переменных в эллиптических координатах возможно в том случае, если потенциальная энергия имеет вид

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}. \tag{61,4}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для функции S_0

$$\frac{1}{2m\sigma^2}\,\frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}=E$$

можно тогда записать так:

$$\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial\xi}\right)^2+2m\sigma^2a(\xi)-2m\sigma^2E\operatorname{sh}^2\xi\right]+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial\eta}\right)^2+2m\sigma^2b(\eta)-2m\sigma^2E\sin^2\eta\right]=0.$$

Положив

$$S_0(\xi,\eta)=S_1(\xi)+S_2(\eta)$$

и вводя произвольную постоянную α, получим два уравнения:

$$\left(\frac{dS_1}{d\xi}\right)^2+2m\sigma^2a(\xi)-2m\sigma^2E\operatorname{sh}^2\xi=\alpha,$$
$$\left(\frac{dS_2}{d\eta}\right)^2+2m\sigma^2b(\eta)-2m\sigma^2E\sin^2\eta=-\alpha.$$

Проинтегрировав эти уравнения, найдем полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$S=\int\sqrt{\alpha-2m\sigma^2a(\xi)+2m\sigma^2E\operatorname{sh}^2\xi}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{-\alpha-2m\sigma^2b(\eta)+2m\sigma^2E\sin^2\eta}\,d\eta-Et. \tag{61,5}$$

Произвольными постоянными являются здесь α и E.

Выясним теперь наглядный смысл формулы (61,4). Обозначим через r_1 и r_2 расстояние материальной точки от точек плоскости x, y с координатами (σ; 0) и ($-\sigma$; 0). Тогда имеем

$$r_1 = \sqrt{(x-\sigma)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+\sigma)^2 + y^2}.$$

Выразим теперь r_1 и r_2 через эллиптические координаты ξ и η. При помощи формулы (61,1) получаем

$$r_1 = |(x-\sigma) + iy| = \sigma\,|\operatorname{ch}(\xi + i\eta) - 1| = 2\sigma\left|\operatorname{sh}^2 \frac{\xi + i\eta}{2}\right| = 2\sigma\left|\operatorname{sh}\frac{\xi + i\eta}{2}\right|^2.$$

Вычисляя квадрат модуля, найдем

$$\left|\operatorname{sh}\frac{\xi + i\eta}{2}\right|^2 = \operatorname{sh}\frac{\xi + i\eta}{2}\operatorname{sh}\frac{\xi - i\eta}{2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta).$$

Аналогично вычисляется и r_2. В результате получаем

$$r_1 = \sigma(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta),$$
$$r_2 = \sigma(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta).$$

Из этих формул следует, что

$$\operatorname{ch}\xi = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}, \quad \cos\eta = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}. \qquad (61,6)$$

Условие (61,4), которому должна удовлетворять потенциальная энергия для того, чтобы разделение переменных в эллиптических координатах было возможно, принимает теперь вид

$$U = \frac{A(r_1 + r_2) + B(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}. \qquad (61,7)$$

В пространственном случае будем исходить из функции Лагранжа в цилиндрических координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - U(\rho, \varphi, z).$$

Эллиптические координаты вводятся при помощи соотношения, подобного (61,1):

$$z + i\rho = \sigma \operatorname{ch}(\xi + i\eta). \qquad (61,8)$$

Поступая, как было указано выше, найдем

$$\dot z^2 + \dot\rho^2 = \sigma^2(\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta)(\dot\xi^2 + \dot\eta^2).$$

Из формулы (61,8) находим выражение для ρ через ξ и η:

$$\rho = \sigma \operatorname{sh}\xi \sin\eta.$$

Окончательно получаем функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{m\sigma^2}{2}\left[(\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta)(\dot\xi^2 + \dot\eta^2) + \operatorname{sh}^2\xi \sin^2\eta\,\dot\varphi^2\right] - U(\varphi, \xi, \eta). \qquad (61,9)$$

Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m\sigma^2}\left[\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta} + \frac{p_\varphi^2}{\operatorname{sh}^2\xi \sin^2\eta}\right] + U(\varphi, \xi, \eta). \qquad (61,10)$$

Переменные разделяются, если потенциальная энергия имеет вид

$$U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}+\frac{c(\varphi)}{\operatorname{sh}^2\xi\sin^2\eta}. \tag{61,11}$$

Аналогично предыдущим случаям получаем

$$S=\int\sqrt{\alpha-2m\sigma^2c(\varphi)}\,d\varphi+$$
$$+\int\sqrt{\beta-\frac{\alpha}{\operatorname{sh}^2\xi}-2m\sigma^2a(\xi)+2m\sigma^2E\operatorname{sh}^2\xi}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{-\beta-\frac{\alpha}{\sin^2\eta}-2m\sigma^2b(\eta)+2m\sigma^2E\sin^2\eta}\,d\eta-Et. \tag{61,12}$$

Произвольными постоянными здесь являются α, β и E.

Выражение для потенциальной энергии, при которой возможно отделение переменных в эллиптических координатах, можно написать и в другом виде. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния материальной точки до точек пространства с координатами $(0, 0, \sigma)$ и $(0, 0, -\sigma)$. Подобно предыдущему найдем

$$r_1=\sqrt{\rho^2+(z-\sigma)^2}=\sigma(\operatorname{ch}\xi-\cos\eta),$$
$$r_2=\sqrt{\rho^2+(z+\sigma)^2}=\sigma(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta),$$

откуда

$$r_1r_2=\sigma^2(\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\eta)=\sigma^2(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta).$$

Принимая еще во внимание, что $\rho=\sigma\operatorname{sh}\xi\sin\eta$, мы формулу (61,11) можем представить в виде

$$U=\frac{A(r_1+r_2)+B(r_1-r_2)}{r_1r_2}+\frac{C(\varphi)}{\rho^2}. \tag{61,13}$$

Очевидно, что частным случаем этой формулы является потенциальная энергия вида

$$U=\frac{c_1}{r_1}+\frac{c_2}{r_2}, \tag{61,14}$$

т. е. случай кулоновского взаимодействия материальной точки с двумя неподвижными зарядами, находящимися друг от друга на расстоянии 2σ. В этом случае в (61,11) $c(\varphi)=0$, $a(\xi)=\frac{c_1+c_2}{\sigma}\operatorname{ch}\xi$, $b(\eta)=$ $=\frac{c_1-c_2}{\sigma}\cos\eta$ и из написанного выше выражения для S имеем

$$S=-Et+\sqrt{\alpha}\,\varphi+$$
$$+\int\sqrt{\beta-\frac{\alpha}{\operatorname{sh}^2\xi}-2m\sigma(c_1+c_2)\operatorname{ch}\xi+2m\sigma^2E\operatorname{sh}^2\xi}\,d\xi+$$
$$+\int\sqrt{-\beta-\frac{\alpha}{\sin^2\eta}-2m\sigma(c_1-c_2)\cos\eta+2m\sigma^2E\sin^2\eta}\,d\eta. \tag{61,15}$$

Связь между эллиптическими и декартовыми координатами, согласно определению

$$x+iy=\sigma\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$$

зависит от параметра σ. В предельных случаях, когда $\sigma = 0$ или $\sigma = \infty$, эллиптические координаты переходят, соответственно, в полярные или параболические координаты.

Рассмотрим сначала случай $\sigma = 0$. Если $\sigma \to 0$, то, так как правая часть равенства (61,1) должна оставаться конечной, то $\operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ должен по модулю возрастать с убыванием σ. Другими словами при этом должна возрастать величина ξ. Поэтому при малых σ формула (61,1) переходит в $x + iy = \frac{\sigma}{2} e^{\xi + i\eta}$. Вводя полярные координаты r и φ, имеем

$$x + iy = re^{i\varphi} = \frac{\sigma}{2} e^{\xi + i\eta},$$

откуда

$$r = \frac{\sigma}{2} e^{\xi}, \quad \varphi = \eta.$$

Таким образом при стремлении параметра σ к нулю, переменная η переходит в полярный угол φ, а ξ — в простую функцию от r.

Перейдем к случаю $\sigma \to \infty$. Перепишем равенство (61,1) в виде

$$x - \sigma + iy = \sigma \{ \operatorname{ch}(\xi + i\eta) - 1 \} = 2\sigma \operatorname{sh}^2 \frac{\xi + i\eta}{2}.$$

Перенесем начало декартовой системы координат в точку $x = \sigma$, $y = 0$, т. е. положим $x_1 = x - \sigma$, $y_1 = y$; тогда

$$x_1 + iy_1 = 2\sigma \operatorname{sh}^2 \frac{\xi + i\eta}{2}.$$

При $\sigma \to \infty$ правая часть этого равенства должна оставаться конечной. Отсюда следует, что $\operatorname{sh}^2 \frac{\xi + i\eta}{2}$ должен убывать по модулю при возрастании σ. Поэтому последнее равенство переходит в

$$x_1 + iy_1 = \frac{\sigma}{2} (\xi + i\eta)^2.$$

Сравнивая эту формулу с соотношением (60,1), мы видим, что эллиптические координаты ξ и η в предельном случае — когда параметр σ стремится к бесконечности — становятся пропорциональными квадратам параболических координат. Отсюда видно, что все рассмотренные нами существенные случаи разделения переменных являются частными случаями эллиптических координат.

§ 62. Канонические переменные

Рассмотрим консервативную механическую систему, имеющую n степеней свободы. Как известно [см. (58,9)] полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в этом случае имеет вид

$$S = S_0(q_1, \ldots, q_n; \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)t. \qquad (62,1)$$

Произведем каноническое преобразование, приняв $S_0(q, \alpha)$ за функцию преобразования, а величины α_i — за новые импульсы. Соответствующие новые координаты обозначим через β_i. Согласно формулам (57,10)

$$p_i = \frac{\partial S_0(q, \alpha)}{\partial q_i}, \tag{62,2}$$

$$\beta_i = \frac{\partial S_0(q, \alpha)}{\partial \alpha_i}. \tag{62,3}$$

Так как функция преобразования $S_0(q, \alpha)$ не зависит от времени явно, то новая функция Гамильтона H' равна старой функции H, выраженной в новых переменных. Следовательно, функция Гамильтона равна просто энергии, выраженной через величины α_i:

$$H' = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{62,4}$$

Напишем канонические уравнения для новых переменных:

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i}, \tag{62,5}$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i}. \tag{62,6}$$

Так как H' зависит только от α, то (62,5) дает

$$\dot{\alpha}_i = 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha_i = \text{const}.$$

Обратимся теперь к уравнениям (62,6). Так как величины α_i постоянны, то и вся правая часть в этих уравнениях сохраняет постоянное значение, т. е.

$$\dot{\beta}_i = \text{const}.$$

Отсюда видно, что новые координаты β_i являются линейными функциями времени и с течением времени, т. е. при $t \to \infty$ систематически либо возрастают, стремясь к $+\infty$, либо убывают, стремясь к $-\infty$. Этим свойством новых координат β мы воспользуемся для исследования возможных типов движения системы.

Пусть q — одна из декартовых координат системы. При движении, очевидно, возможны лишь следующие три случая:

I. Координата q неограниченно возрастает, т. е. стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.

II. Координата q стремится к конечному пределу.

III. Координата q ни к какому пределу, ни к конечному, ни к бесконечному не стремится.

В случае I, когда $\lim\limits_{t \to \infty} q = \pm\infty$, движение является инфинитным. Примером инфинитного движения может служить свободное движение материальной точки.

Переходя к случаю II, возьмем частную производную по q от соотношения (62,3). Изменяя последовательность диференцирования и замечая, что $\frac{\partial S_0}{\partial q} = p$, получаем

$$\frac{\partial \beta(q, \alpha)}{\partial q} = \frac{\partial^2 S_0(q, \alpha)}{\partial q\, \partial \alpha} = \frac{\partial^2 S_0(q, \alpha)}{\partial \alpha\, \partial q} = \frac{\partial p(q, \alpha)}{\partial \alpha},$$

откуда

$$\frac{\partial \beta(q, \alpha)}{\partial q} = \frac{\partial p(q, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Исходя из того, что при $t \to \infty$ переменная β стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, а переменная q — к конечному пределу, мы можем заключить, что $\frac{\partial \beta}{\partial q} \to \pm\infty$. На основании предыдущего равенства мы видим, что при этом и $\frac{\partial p}{\partial \alpha} \to \pm\infty$. Можно без труда доказать, что не только $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$, но и сам импульс p должен неограниченно возрастать, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} p = \pm\infty$. Движение, соответствующее приближению декартовой координаты к конечному пределу, носит название лимитационного движения. Примером лимитационного движения может служить падение друг на друга двух взаимодействующих частиц. Как было выяснено в § 19, лимитационное движение в этом случае возможно, если при уменьшении расстояния между частицами r до нуля, потенциальная энергия стремится к $-\infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$.

В случае III, когда координата q не стремится ни к какому пределу, движение имеет квази-стационарный характер и называется *условно периодическим*. Таким движением является, например, рассмотренное в § 19 движение двух точек, когда оно не является ни инфинитным, ни лимитационным.

Координаты β_i можно выразить через переменные q и p. Для этого следует при помощи соотношений (62,2) выразить все α_i через q и p и подставить найденные выражения $\alpha_i = \alpha_i(q, p)$ в правые части соотношений (62,3). Тогда получим

$$\beta_i = \beta_i(q, p).$$

В случае условно-периодического движения в правой части последнего равенства координата q и импульс p не стремятся ни к конечному, ни к бесконечному пределу. Левая же часть равенства, т. е. величина β стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Очевидно, что это возможно только в том случае, если переменная β есть неоднозначная функция переменных q и p.

Таким образом мы видим, что в случае условно-периодического движения переменная β, а следовательно [см. (62,3)], и укороченное действие S_0 являются неоднозначными функциями координат и импульсов, т. е. неоднозначными функциями состояния системы.

Для геометрической интерпретации ряда законов механики пользуются так называемым *фазовым пространством*. Фазовое пространство системы с n степенями свободы имеет $2n$ осей, соответствующих величинам $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. Каждому состоянию системы соответствует определенная *фазовая точка*. При движении фазовая точка описывает *фазовую линию*. В случае одной степени свободы фазовое пространство есть просто фазовая плоскость q, p (рис. 55).

Так как S_0 есть неоднозначная функция состояния системы, то если мы обойдем от состояния (q, p) какой-либо замкнутый путь в фазовом пространстве и придем снова к тому же состоянию (q, p), то функция S_0 не примет, вообще говоря, прежнего значения. Обозначим приращение функции S_0 при таком обходе через ΔS_0.

Из соотношения $p = \frac{\partial S_0}{\partial q}$ получаем

$$\Delta p = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \Delta S_0.$$

Но при полном обходе $\Delta p = 0$, так как мы возвращаемся в ту же точку фазового пространства. Отсюда следует, что при обходе по замкнутой фазовой линии функция S_0 изменяется на величину, не зависящую от координаты q:

$$\Delta S_0 = \Delta S_0(\alpha).$$

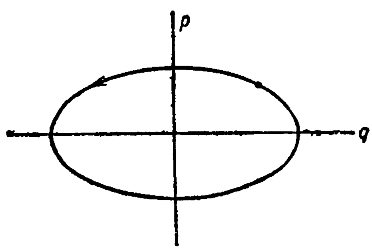


Рис. 55.

Конечно, при обходе по некоторым фазовым линиям ΔS_0 может быть равно нулю. Наименьшее отличное от нуля значение ΔS_0 называется периодом, соответствующим функции S_0. Обозначим для краткости период через $I(\alpha)$ или просто I.

Если мы проследим за изменением функции S_0 за время m обходов по замкнутой фазовой кривой, то увидим, что при возвращении в исходное положение она получит приращение $\Delta S_0 = mI$, где m — целое число.

В общем случае, когда система, совершающая условно-периодическое движение, имеет n координат, функция S_0 зависит от n переменных. Поэтому ей соответствует n, вообще говоря, независимых периодов. Эти периоды мы будем обозначать через $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Тогда

$$\Delta S_0 = m_1 I_1 + m_2 I_2 + \ldots + m_n I_n, \qquad (62,7)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые числа. Периоды I_k носят название *переменных действия*.

Возвратимся теперь к каноническому преобразованию от переменных p, q к переменным α, β. В качестве новых импульсов, т. е. величин α_k, возьмем переменные действия I_k. Соответствующие им переменные β_k обозначим через w_k. Они называются угловыми переменными. Для их определения служит формула (62,3):

$$w_k = \frac{\partial S_0(q, I)}{\partial I_k}. \qquad (62,8)$$

Переменные I и w носят название *канонических переменных*.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби можно написать в виде

$$S = S_0(q_1, \ldots, q_n; I_1, \ldots, I_n) - E(I_1, \ldots, I_n)\, t. \qquad (62,9)$$

Уравнения Гамильтона для канонических переменных сохраняют вид

$$\dot{I}_k = 0, \tag{62,10}$$

$$\dot{w}_k = \frac{\partial E(I)}{\partial I_k}. \tag{62,11}$$

Легко определить периоды, соответствующие переменным w_k. На основании (62,8) и (62,7) мы видим, что приращение w_k при обходе по замкнутой фазовой кривой, есть

$$\Delta w_k = \Delta \frac{\partial S_0}{\partial I_k} = \frac{\partial}{\partial I_k} \Delta S_0 = m_k,$$

т. е. произвольное целое число.

Отсюда следует, что и наоборот, если мы выразим q и p или какую-либо однозначную функцию от q и p через угловые координаты, то эти функции не будут изменять своих значений, если угловые координаты изменятся на произвольные целые числа. Иными словами, всякая функция от q и p, будучи выражена через угловые координаты, является периодической функцией $F(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ с основными периодами, равными единице, для каждой угловой координаты w_k. Это утверждение дает возможность выяснить весьма важное свойство условно-периодического движения.

Рассмотрим сначала случай одной степени свободы. Пусть F — какая-либо функция q и p. Выражая ее через угловую координату w, получим периодическую функцию $F(w)$ с периодом, равным единице. Как и всякую периодическую функцию, $F(w)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$F = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{ilw}, \tag{62,12}$$

где суммирование производится по всем целым значениям l. Коэфициенты A_l — комплексные числа, причем если F — вещественная функция, то A_l и A_{-l} должны быть сопряженными комплексными величинами, т. е. $A_l = \overset{*}{A}_{-l}$.

Из уравнения (62,11) $\dot{w} = \frac{\partial E(I)}{\partial I}$ следует

$$w = \frac{\partial E}{\partial I} t + \text{const}. \tag{62,13}$$

Подставляя это выражение в формулу (62,12) и включая const в коэфициенты A_l, получим

$$F = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l e^{il\frac{\partial E}{\partial I}t}. \tag{62,14}$$

Все члены этого ряда являются периодическими функциями времени с частотами $l\frac{\partial E}{\partial I}$, где l — целое число. Поэтому F есть периодическая функция времени с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\partial E}{\partial I}}. \tag{62,15}$$

Таким образом в случае одной степени свободы координата и импульс (т. е. состояние системы) являются просто периодическими функциями времени, как это мы уже выяснили выше в § 16. Фазовая точка при движении системы описывает замкнутую кривую в плоскости q, p.

В общем случае, когда система имеет n степеней свободы, функцию $F(w_1, \ldots, w_n)$ также можно разложить в ряд Фурье, но аргументы тригонометрических функций теперь будут линейными комбинациями угловых координат, т. е. будут иметь вид $l_1 w_1 + l_2 w_2 + \ldots + l_n w_n$, где $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — произвольные целые числа. Таким образом мы получим

$$F = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{l_n=-\infty}^{\infty} A_{l_1, \ldots, l_n} e^{i(l_1 w_1 + \ldots + l_n w_n)}. \tag{62,16}$$

Если здесь вместо угловых переменных w_k подставить [см. (62,11)] $w_k = \frac{\partial E}{\partial I_k} t + \text{const}$, то аргументы тригонометрических функций окажутся равными

$$\left(l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + l_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} + \ldots + l_n \frac{\partial E}{\partial I_n}\right) t.$$

Так как $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — произвольные целые числа, то частоты

$$l_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + l_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} + \ldots + l_n \frac{\partial E}{\partial I_n}$$

не равны кратным значениям одной и той же частоты. Поэтому функция F в (62,16) уже не является периодической функцией времени и соответственно этому движение не является строго периодическим.

Однако можно показать, что если система однажды прошла через какое-то состояние, то для повторного, сколь угодно близкого прохождения около этого состояния можно указать такой, достаточно большой промежуток времени T, через который такое прохождение будет иметь место. Иными словами система сколь угодно близко возвращается к каждому своему состоянию. Вследствие этого движение называется почти периодическим или условно-периодическим.

Особенное значение имеет тот случай, когда переменные в уравнении Гамильтона-Якоби разделяются. В этом случае укороченное действие S_0 распадается на сумму отдельных функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Формула (62,1) при этом принимает вид

$$S = \sum_k S_k(q_k, \alpha) - E(\alpha) t = \sum_k \int p_k(q_k, \alpha)\, dq - E(\alpha) t. \tag{62,17}$$

Каждой из функций $S_k(q_k, \alpha)$ соответствует свой период I_k. Этот период равен приращению функции S_k при таком изменении координаты q_k, при котором система возвращается в прежнее состояние. Таким образом

$$I_k = \Delta S_k = \oint p_k\, dq_k, \tag{62,18}$$

где интеграл берется по полному изменению координаты q_k.

В качестве примера рассмотрим сначала случай одной степени свободы. В этом случае

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q)$$

и

$$I = \oint p\,dq = \oint \sqrt{2a(q)\,[E - U(q)]}\,dq.$$

Допустим, что q_1 и q_2 — два значения координаты q, при которых подинтегральное выражение обращается в нуль (т. е. полная энергия равна потенциальной). Пусть, далее, между q_1 и q_2 энергия $E > U$. Тогда полное изменение координаты q сводится к изменению от q_1 до q_2 и затем снова от q_2 до q_1 (см. § 16). Если $q_1 < q_2$, то при изменении q от q_1 до q_2 импульс p больше нуля. В точке $q = q_2$ импульс обращается в нуль, так как координата начинает уменьшаться. При дальнейшем изменении q от q_2 до q_1 импульс отрицателен. Поэтому, обозначая абсолютную величину импульса через $|p|$, имеем

$$I = \int_{q_1}^{q_2} |p|\,dq + \int_{q_2}^{q_1} -|p|\,dq = 2\int_{q_1}^{q_2} |p|\,dq.$$

Таким образом

$$I = 2\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2a(q)\,[E - U(q)]}\,dq. \tag{62,19}$$

В частности для гармонического осциллятора

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

и легко увидеть, что

$$I = \frac{E}{\omega}. \tag{62,20}$$

Рассмотрим движение точки в поле с центральной симметрией. Возьмем в плоскости движения полярные координаты r и φ. Тогда, как известно, переменные разделяются. Так как импульс p_φ равен моменту M, то

$$I_\varphi = \oint p_\varphi\,d\varphi = 2\pi p_\varphi = 2\pi M. \tag{62,21}$$

Для I_r, согласно предыдущему, имеем

$$I_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}\,dr, \tag{62,22}$$

где r_1 и r_2 — два значения r, при которых подкоренное выражение обращается в нуль.

В частности в случае закона Кулона, когда $U = -\frac{a}{r}$,

$$I_r = 2\pi\left(-M + \sqrt{\frac{m}{2|E|}}\,\alpha\right) = -I_\varphi + 2\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|}}. \tag{62,23}$$

Энергия E здесь отрицательна, так как движение финитно. В переменных действия энергия выражается так:

$$E = -\frac{2\pi^2 m\alpha^2}{(I_r + I_\varphi)^2}. \tag{62,24}$$

§ 63. Адиабатические инварианты

Рассмотрим систему, совершающую условно-периодическое движение, причем внешние условия, в которых эта система находится, медленно или, как говорят, адиабатически меняются со временем. Займемся вопросом о том, как меняется движение при адиабатическом изменении внешних условий. Для этого мы должны определить, какие величины остаются при этом постоянными, т. е. являются так называемыми *адиабатическими инвариантами*. Подчеркнем, что механические инварианты (интегралы движения) не являются, вообще говоря, адиабатическими инвариантами. Так, при изменении внешних условий энергия не остается постоянной, а меняется со временем.

Покажем, что адиабатическими инвариантами являются переменные действия I. При каноническом преобразовании к переменным действия функцией преобразования является, как мы знаем из предыдущего параграфа, действие $S_0(q_0, I)$. В рассматриваемом случае, когда внешние условия меняются со временем, S_0 будет зависеть явно от времени. А именно, если $\lambda = \lambda(t)$ — параметры, определяющие внешние условия (для краткости пишем всего один параметр), то

$$S_0 = S_0(q, I, \lambda(t)).$$

Поэтому новая функция Гамильтона H' не будет, как в § 69, равна просто $E(I)$, а согласно общим формулам канонических преобразований получится

$$H' = E(I) - \frac{\partial S_0}{\partial t} = E(I) - \frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\dot{\lambda}.$$

Вводя обозначение $\left(\frac{\partial S_0}{\partial \lambda}\right)_I = \Lambda$, имеем

$$H' = E(I) - \Lambda\dot{\lambda}. \tag{63,1}$$

Уравнения Гамильтона в переменных I и w дают

$$\dot{I} = -\frac{\partial H'}{\partial w} = \frac{\partial \Lambda}{\partial w}\dot{\lambda}. \tag{63,2}$$

Рассмотрим некоторое небольшое изменение $\delta\lambda$ параметра λ. Поскольку изменение внешних условий происходит медленно (адиабатически), то λ меняется на $\delta\lambda$ в течение большого промежутка времени T. Ввиду того, что $dI = \frac{\partial \Lambda}{\partial w} d\lambda$ [см. (63,2)], можно, очевидно, написать для изменения δI величины I при изменении внешних параметров на $\delta\lambda$, выражение

$$\delta I = \delta\lambda \frac{\int \frac{\partial \Lambda}{\partial w} dt}{T} = \delta\lambda \overline{\frac{\partial \Lambda}{\partial w}}, \tag{63,3}$$

где черта обозначает среднее по промежутку времени T. Из (63,3) имеем

$$\frac{dI}{d\lambda} = \overline{\frac{\partial\Lambda}{\partial w}}. \tag{63,4}$$

S_0 есть, как мы знаем, неоднозначная функция координат; при возвращении координат к первоначальным значениям к S_0 прибавляется I. Но $\left(\frac{\partial S_0}{\partial\lambda}\right)_I = \Lambda$ есть однозначная функция, так как производная берется при постоянном I и прибавляющееся к S_0 целое кратное от I при диференцировании исчезает. Поэтому Λ, выраженное как функция угловых переменных w, есть периодическая функция времени (см. § 62). Следовательно, и $\frac{\partial\Lambda}{\partial w}$ есть периодическая функция, причем к тому же не содержащая никаких постоянных членов (они исчезают при диференцировании Λ). Среднее же значение такой периодической функции равно нулю. Таким образом $\overline{\frac{\partial\Lambda}{\partial w}} = 0$, а потому и

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0. \tag{63,5}$$

Это и доказывает то, что переменные действия I являются адиабатическими инвариантами, т. е. не меняются при медленном изменении внешних условий.

Рассмотрим некоторые примеры. Для гармонического осциллятора $I = \frac{E}{\omega} = \text{const}$. Поэтому при адиабатическом изменении внешних условий энергия меняется пропорционально частоте.

В кулоновском поле адиабатическими инвариантами являются I_r и I_φ [см. (62,21), (62,23)]; эти величины остаются постоянными при медленном изменении потенциальной энергии (изменении коэфициента α в $U = -\frac{\alpha}{r}$). В кулоновском поле частица с массой m движется по коническому сечению с эксцентриситетом [см. (20,4)]

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

Но e может быть выражено через I_r и I_φ:

$$e^2 = 1 + \left(\frac{I_\varphi}{I_r + I_\varphi}\right)^2,$$

а потому тоже является адиабатическим инвариантом. Наконец, параметр p конического сечения равен [см. (20,4)]:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha^2} = \left(\frac{I_\varphi}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{m\alpha}.$$

Отсюда мы видим, что при адиабатическом изменении поля размеры орбиты меняются обратно пропорционально α.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Тензоры

Наряду с векторами приходится рассматривать и другие величины компоненты которых являются произведениями компонент векторов или суммой таких произведений. Эти величины носят название *тензоров*. В зависимости от числа векторов, из компонент которых образованы компоненты тензора, говорят о тензоре того или иного ранга.

Составив, например, произведение различных компонентов векторов **A** и **B** по два, мы получим девять величин

$$T_{ik} = A_i B_k,$$

которые являются компонентами тензора 2-го ранга.

В виде таблицы этот тензор можно записать так:

$$(T_{ik}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

В то время как компоненты вектора имеют один значок, компоненты тензора 2-го ранга имеют два значка. Компоненты, у которых оба значка одинаковы, носят название диагональных элементов тензора; компоненты, у которых значки различны, называются недиагональными. В случае тензора n-го ранга компоненты имеют n значков, причем, так как каждый значок принимает значения 1, 2, 3, тензор n-го ранга имеет 3^n компонент.

Рассмотрим две системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$, имеющие общее начало O. Обозначим через α_{ik} косинус угла между осями x'_i и x_k. Вектор, как известно, характеризуется тем, что при вращении системы координат его компоненты преобразуются, как компоненты радиуса вектора, т. е. по закону

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k. \tag{1,1}$$

Определим теперь, как преобразуются при вращении системы координат величины $T_{ik} = A_i B_k$. На основании формулы (1,1) имеем

$$T'_{ik} = A'_i B'_k = \sum_m \alpha_{im} A_m \cdot \sum_n \alpha_{kn} B_n = \sum_{m,n} \alpha_{im}\alpha_{kn} A_m B_n = \sum_{m,n} \alpha_{im}\alpha_{kn} T_{mn}.$$

Величины $T_{ik} = A_i B_k$ представляют собой простейший пример тензора 2-го ранга. В общем случае тензором 2-го ранга называется всякая совокупность девяти величин T_{ik}, преобразующихся при вращении системы координат, по закону

$$T'_{ik} = \sum_{m, n} \alpha_{im} \alpha_{kn} T_{mn}. \tag{1,2}$$

Аналогичным образом определяются тензоры и высших рангов. Так, например, в случае тензора 3-го ранга

$$T'_{ikl} = \sum \alpha_{im} \alpha_{kn} \alpha_{lp} T_{mnp}. \tag{1,3}$$

Заметим, что вектор можно рассматривать, как тензор первого ранга, а скаляр, как тензор нулевого ранга.

Суммой двух тензоров P_{ik} и Q_{ik} называется тензор T_{ik} с компонентами

$$T_{ik} = P_{ik} + Q_{ik}. \tag{1,4}$$

Что сумма двух тензоров действительно является тензором, следует из линейности соотношения (1,4) и линейности формул (1,2) преобразования компонентов тензора. Из того, что сумма двух тензоров снова является тензором, мы можем заключить, что компонентами тензора являются не только произведения компонентов векторов, но и сумма таких произведений.

Произведением тензора P_{ik} на скаляр λ называется тензор T_{ik}, компоненты которого равны произведению скаляра на соответствующие компоненты тензора, т. е.

$$T_{ik} = \lambda P_{ik}. \tag{1,5}$$

Легко показать, что величины T_{ik}, в самом деле, образуют тензор.

Составляя всевозможные попарные произведения компонент двух тензоров, получим снова тензор, причем ранг этого тензора будет равен сумме рангов обоих тензоров. Этот тензор носит название *произведения тензоров*. Так, например, умножая тензор 2-го ранга P_{ik} на вектор Q_l, получим

$$T_{ikl} = P_{ik} Q_l. \tag{1,6}$$

Величины T_{ikl} являются компонентами тензора 3-го ранга.

Допустим, что все компоненты тензора T являются функциями некоторой скалярной переменной t. Производной от тензора по этой переменной называется новый тензор, компоненты которого равны производным по t от соответствующих компонент тензора T, т. е.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i, k} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial t}. \tag{1,7}$$

Что величины $\frac{\partial T_{ik}}{\partial t}$ действительно образуют тензор, ясно из того, что разность двух тензоров и результат деления тензора на скаляр, есть тензор.

В целях упрощения написания формул условились в случае, когда в данном выражении один и тот же буквенный значок встречается дважды, производить суммирование по всем его значениям от 1 до 3. Например, выражение (1,2) может быть переписано так:

$$T'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kn}T_{mn}$$

и, так как здесь m и n встречаются дважды, то этим самым указывается на то, что нужно произвести суммирование $\sum\limits_{m=1}^{3}\sum\limits_{n=1}^{3}$.

Следует иметь в виду, что в каждом члене один и тот же значок не может встречаться более двух раз. Свободные значки, по которым суммирование не производится, должны быть одними и теми же во всех членах равенства. Всякий буквенный значок, встречающийся в каком-либо члене дважды, является „немым" и может быть заменен любой буквой, еще не имеющейся в этом члене. Два или больше таких немых значков можно менять местами.

§ 2. Упрощение тензоров

При вращении системы координат скалярное произведение двух векторов не изменяется и является, таким образом, скалярной величиной. Пользуясь выражением $(\mathbf{AB}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ и условным обозначением суммирования, мы можем это утверждение записать так:

$$A_iB_i = \text{скаляр}.$$

Рассмотрим теперь тензор 2-го ранга, образованный из двух векторов A_i и B_i: $C_{ik} = A_iB_k$. Составим сумму диагональных элементов этого тензора. В соответствии с условием о суммировании мы должны обозначать эту сумму просто через C_{ii}:

$$C_{ii} = C_{11} + C_{22} + C_{33} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_iB_i.$$

Таким образом C_{ii} является скалярной величиной. То же самое относится, очевидно, и к любому тензору 2-го ранга T_{ik}: положив оба значка одинаковыми, получаем скаляр

$$T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \qquad (2,1)$$

Более того, подобным образом можно поступить и с тензором любого ранга; полагая у него два значка одинаковыми, т. е., производя соответствующее суммирование, получим из тензора n-го ранга тензор n — 2-го ранга. Эта операция носит название *упрощения* тензора. Каждое упрощение понижает ранг тензора на две единицы. Очевидно, что, упрощая тензор четного ранга, мы в конце концов придем к скаляру, а в случае нечетного ранга — к вектору.

Примеры. Упрощая тензор третьего ранга T_{ikl} различным образом по двум значкам, получим три вектора: T_{ikk}, T_{kik}, T_{kki}.

Упрощая тензор четвертого ранга T_{iklm} различным образом по двум значкам, получим три тензора 2-го ранга: T_{ikll}, T_{ilkl}, T_{illk}. Упрощая эти тензора еще раз, получим три скаляра: T_{kkll}, T_{klkl}, T_{kllk}.

Возьмем теперь тензор 2-го ранга T_{ik} и вектор A_l. Перемножив их, получим тензор 3-го ранга. Упрощая этот тензор по значкам k и l, получим вектор

$$B_i = T_{ik}A_k. \qquad (2,2)$$

Этот вектор носит название *скалярного произведения тензора* T_{ik} *и вектора* A_l.

Перемножив два тензора 2-го ранга A_{ik} и B_{lm}, получим тензор 4-го ранга. Упростив этот тензор по значкам k и l, получим тензор 2-го ранга:

$$C_{im} = A_{ik}B_{km}, \tag{2,3}$$

который называется *скалярным произведением тензоров* A_{ik} и B_{lm}.

Вообще, умножая два тензора и производя затем упрощение по одной или нескольким парам значков, мы получим не только тензор, ранг которого равен сумме рангов обоих тензоров, но и тензор, ранг которых на четное число меньше. Это действие умножения и последующего упрощения тензоров называют *скалярным умножением тензоров*. Формулы (2,2) и (2,3) дают простейшие примеры таких произведений.

§ 3. Единичный тензор

Рассмотрим совокупность величин δ_{ik}, равных единице, когда $i = k$, и равных нулю, когда $i \neq k$, т. е.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad i = k \\ 0 & \text{если} \quad i \neq k \end{cases} \tag{3,1}$$

В виде таблицы они напишутся следующим образом:

$$(\delta_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3,2}$$

т. е. все диагональные элементы таблицы равны единице, все недиагональные — нулю. Легко видеть, что

$$\delta_{ik}A_k = A_i, \tag{3,3}$$

где A_i — произвольный вектор. Отсюда следует, что величины δ_{ik} образуют тензор. Этот тензор носит название *единичного* тензора.

Из формулы (3,3) мы видим, что, составляя скалярное произведение $\delta_{ik}A_k$, мы просто меняем индекс k на i. Этот результат имеет общее значение: умножая произвольный тензор на δ_{ik} и упрощая полученный тензор по двум значкам, один из которых есть k, получим этот же тензор, но с заменой соответствующего значка на i.

В связи с этим тензор δ_{ik} широко используется при взятии векторов и тензоров за скобки. Примером может служить следующее преобразование:

$$A_{ik}B_k - B_i = A_{ik}B_k - \delta_{ik}B_k = B_k(A_{ik} - \delta_{ik}).$$

Тензором, *обратным данному тензору* A_{ik}, называется тензор A^{-1}_{ik}, скалярное умножение которого на тензор A_{ik} дает единичный тензор:

$$A^{-1}_{il}A_{lk} = \delta_{ik}. \tag{3,4}$$

Если умножить тензор на обратный ему, не слева, а справа, мы получим снова единичный тензор, т. е.

$$A_{il}A^{-1}_{lk} = \delta_{ik}.$$

Чтобы убедиться в этом, напишем равенство (3,4) в виде

$$A^{-1}A = 1.$$

Умножив справа на тензор A^{-1}, получим

$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}.$$

Умножив теперь последнее равенство на тензор A', обратный тензору A^{-1}, т. е. такой, что $A'A^{-1} = 1$. Тогда

$$A'A^{-1}AA^{-1} = A'A^{-1}.$$

Откуда

$$AA^{-1} = 1,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Симметрия тензоров

Во многих вопросах применения тензорного исчисления существенную роль играют свойства симметрии тензоров.

Тензор T_{ik}, обладающий тем свойством, что значение любой компоненты его не меняется от перестановки значков этой компоненты, т. е.

$$T_{ik} = T_{ki}, \tag{4,1}$$

называется *симметрическим* тензором. Очевидно, что компоненты симметрического тензора T_{ik}, симметричные относительно главной диагонали таблицы тензора, равны между собой. Поэтому симметрический тензор имеет 6 независимых компонент, а не 9, как тензор в общем случае.

Тензор T_{ik}, компоненты которого при перестановке значков меняют знак, т. е.

$$T_{ik} = -T_{ki}, \tag{4,2}$$

называется *антисимметрическим* тензором. Очевидно, что диагональные элементы антисимметрического тензора равны нулю:

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = 0.$$

Действительно, имеем, например $T_{xx} = -T_{xx}$, откуда $T_{xx} = 0$. С другой стороны, элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку. Таким образом антисимметрический тензор имеет только три независимые компоненты.

В общем случае тензор T_{ik} не является, конечно, ни симметрическим, ни антисимметрическим. Такой тензор носит название *асимметрического* тензора.

Понятия симметрии и антисимметрии применимы и к тензорам, ранг которых выше двух. При этом тензор называется симметрическим относительно какой-либо пары своих значков, если перестановка их не меняет величины соответствующих компонент, и антисимметрическим, если меняет знак на противоположный.

Заметим, что из формулы (1,2) легко можно вывести, что при вращении системы координат свойства симметрии тензора не изменяются.

Легко видеть, что упрощенное скалярное произведение симметрического тензора S_{ik} и антисимметрического A_{ik} равно нулю:

$$S_{ik}A_{ki}=0. \tag{4,3}$$

В самом деле, меняя сначала значки у S_{ik}, затем, переставив значки i и k и, наконец, переставляя значки у A_{ik}, получим

$$S_{ik}A_{ki}=S_{ki}A_{ki}=S_{ik}A_{ik}=-S_{ik}A_{ki},$$

откуда и следует (4,3).

Всякий тензор второго ранга T_{ik} можно разложить, и притом единственным образом, на сумму двух тензоров, из которых один будет симметрическим, а другой антисимметрическим.

Действительно, $T_{ik}=\frac{T_{ik}+T_{ki}}{2}+\frac{T_{ik}-T_{ki}}{2}$, поэтому

$$T_{ik}=S_{ik}+A_{ik}, \tag{4,4}$$

где

$$S_{ik}=\frac{T_{ik}+T_{ki}}{2} \tag{4,5}$$

есть симметрическая часть тензора T_{ik}, а

$$A_{ik}=\frac{T_{ik}-T_{ki}}{2} \tag{4,6}$$

— его антисимметрическая часть.

Из приведенных формул, в частности, следует, что в квадратичной форме $T_{ik}x_ix_k$ тензор T_{ik} всегда можно считать симметрическим. В самом деле, если это не так, то, написав $T_{ik}=S_{ik}+A_{ik}$ и замечая, что

$$A_{ik}x_ix_k=A_{ki}x_kx_i=-A_{ik}x_ix_k=0,$$

мы имеем

$$T_{ik}x_ix_k=S_{ik}x_ix_k, \tag{4,7}$$

где S_{ik} — симметрический тензор.

В случае тензоров, ранг которых выше второго, разложение тензора на симметрическое и антисимметрическое слагаемые уже не может быть произведено так просто.

§ 5. Единичный аксиальный тензор

Рассмотрим тензор, антисимметрический по отношению к любой паре своих значков. Ранг такого тензора не может быть выше 3-го.

Действительно, в противном случае число индексов было бы больше трех, и поэтому у каждой компоненты хоть один из индексов x, y, z встречался бы не менее двух раз, а так как тензор является антисимметрическим и по отношению к этой паре одинаковых индексов, то все компоненты были бы равны нулю.

Что касается тензора 3-го ранга T_{ikl}, антисимметрического относительно каждой пары своих значков, то из 27 его компонент не равны нулю только те 6 компонент, у которых индексы i, k, l образуют перестановку чисел 1, 2, 3. При этом, если мы обозначим T_{123} через T, то не равные нулю компоненты T_{ikl} будут равны $+T$, если перестановка i, k, l получается из 1, 2, 3 четным членом простых перестановок (транспозиций) и $-T$ при нечетном числе транспозиций.

Таким образом тензор T_{ikl}, антисимметрический относительно каждой пары значков, определен с точностью до мультипликативной постоянной, и мы можем положить

$$T_{ikl} = T\varepsilon_{ikl}, \tag{5,1}$$

где через ε_{ikl} обозначена величина, равная: нулю, если среди индексов i, k, l имеются одинаковые; $+1$, если i, k, l есть четная перестановка чисел 1, 2, 3; -1, если это перестановка нечетная.

Составим сумму квадратов компонент тензора T_{ikl}. Имеем

$$T_{ikl}T_{ikl} = T^2\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6T^2.$$

Левая часть этого равенства есть скаляр; поэтому скаляром является и T^2, т. е. при преобразовании координат $T'^2 = T^2$, откуда следует, что $T' = \pm T$. Таким образом при преобразовании координат T либо не изменяется вовсе, либо меняет знак.

Совокупность всех линейных ортогональных преобразований координат

$$x_i' = \alpha_{ik}x_k$$

распадается, как известно, на преобразование вращения системы координат и преобразование зеркального отражения, при котором все координаты меняют знак, т. е.

$$x_i' = -x_i = -\delta_{ik}x_k.$$

Вращение есть преобразование непрерывное, а величина T может изменяться только прерывно. Отсюда следует, что при вращении T не изменяется. С другой стороны, как это видно из соотношения $\alpha_{ik} = -\delta_{ik}$ и формул преобразования компонент тензора при зеркальном отражении, всякий тензор четного ранга не меняет знака, а нечетного — меняет; T_{ikl}, как тензор 3-го ранга, знак меняет. Таким образом мы приходим к заключению, что величина T, хотя и остается неизменной при вращениях, но меняет свой знак при отражении. Величина T не является поэтому настоящим скаляром и именуется *псевдоскаляром*. Соответственно этому и ε_{ikl} не является настоящим тензором, а именно преобразовывается как тензор при повороте системы координат, но не при зеркальном отражении. Такие величины, в отличие от обыкновенных тензоров, называют *аксиальными тензорами*. Тензор ε_{ikl} мы назовем *единичным аксиальным тензором*. Так как каждый аксиальный тензор при зеркальном отражении изменяет знак, то произведение нескольких тензоров при зеркальном отражении умножается на $(-1)^n$, где n — число аксиальных тензоров-сомножителей. Отсюда следует, что произведение, содержащее четное число аксиальных тензоров, является истинным тензором, а содержащее нечетное число их — аксиальным.

При умножении единичного аксиального тензора e_{ikl} на какой-либо истинный тензор мы получим аксиальный тензор. Составив, например, произведение тензора e_{ikl} и вектора B_i, получим аксиальный тензор 2-го ранга

$$C_{ik} = e_{ikl}B_l \tag{5,2}$$

или в компонентах:

$$B_x = C_{yz} = -C_{zy}, \quad B_y = C_{zx} = -C_{xz}, \quad B_z = C_{xy} = -C_{yx}.$$

Из этой формулы видно, что каждому вектору B_l можно сопоставить антисимметрический тензор C_{ik}. Этот тензор называется *дуальным* вектору B_i и наоборот: каждому антисимметрическому тензору C_{ik} соответствует дуальный ему вектор B_i.

Рассмотрим, в частности, антисимметрический тензор, составленный из компонент векторов A_i и B_i следующим образом:

$$C_{ik} = A_iB_k - A_kB_i. \tag{5,3}$$

Положим, далее,

$$\begin{aligned} C_{23} &= A_2B_3 - A_3B_2 = C_1, \\ C_{31} &= A_3B_1 - A_1B_3 = C_2, \\ C_{12} &= A_1B_2 - A_2B_1 = C_3. \end{aligned}$$

Иначе эти формулы можно записать в виде

$$C_i = e_{ikl}A_kB_l, \tag{5,4}$$

откуда видно, что C_i есть аксиальный вектор. Он называется *векторным произведением* векторов A_i и B_i.

Произведение двух единичных аксиальных тензоров, т. е. $e_{ikl}e_{abc}$, является, согласно предыдущему, уже истинным тензором 6-го ранга.

Так как компоненты тензора $e_{ikl}e_{abc}$ не зависят от выбора системы координат, то этот тензор может быть составлен из единичных тензоров δ_{ik}. Существует, однако, только одна комбинация единичных тензоров, антисимметрическая относительно каждой пары из значков i, k, l и каждой пары из значков a, b, c. Составив ее, имеем

$$\begin{aligned} e_{ikl}e_{abc} = \delta_{ia}\delta_{kb}\delta_{lc} + \delta_{ib}\delta_{kc}\delta_{la} + \delta_{ic}\delta_{ka}\delta_{lb} - \\ - \delta_{ia}\delta_{kc}\delta_{lb} - \delta_{ib}\delta_{ka}\delta_{lc} - \delta_{ic}\delta_{kb}\delta_{la}. \end{aligned} \tag{5,5}$$

В численном равенстве левой и правой частей этого равенства убеждаемся, положив $i = a = 1$, $k = b = 2$ и $l = c = 3$. Тогда $e_{123}e_{123} = 1$. То же самое дает и правая часть равенства.

§ 6. Определители

В этом параграфе мы рассмотрим определители и их свойства в связи со свойствами тензоров. Рассмотрим тензор 2-го ранга φ_{ik}. Составим тензор

$$\chi_{abc} = e_{ikl}\varphi_{ai}\varphi_{bk}\varphi_{cl}.$$

Легко видеть, что тензор χ_{abc} антисимметричен относительно всякой пары своих значков. В самом деле, переставляя местами индексы i и k, и пользуясь свойствами тензора ε_{ikl}, имеем

$$\chi_{bac} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{bi}\varphi_{ak}\varphi_{cl} = \varepsilon_{kil}\varphi_{bk}\varphi_{ac}\varphi_{cl} = -\varepsilon_{ikl}\varphi_{ai}\varphi_{bk}\varphi_{cl} = -\chi_{abc}.$$

Однако выше мы видели, что антисимметрический тензор 3-го ранга определен с точностью до мультипликативной постоянной. Поэтому мы можем утверждать, что тензор χ_{abc} пропорционален единичному тензору ε_{abc}. Обозначая коэфициент пропорциональности через $|\varphi|$, имеем $\chi_{abc} = |\varphi|\varepsilon_{abc}$. Очевидно, что $|\varphi|$ есть настоящий скаляр, так как χ_{abc} и ε_{abc} — оба аксиальные тензоры.

Таким образом всякому тензору 2-го ранга φ_{ik} на основании равенства

$$\varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = |\varphi|\varepsilon_{abc} \tag{6,1}$$

можно сопоставить некоторый скаляр $|\varphi|$. Этот скаляр равен определителю, составленному из компонент тензора φ_{ia}. Действительно, положив a, b, c равными x, y и z, соответственно, и принимая во внимание, что $\varepsilon_{xyz} = 1$, получим

$$|\varphi| = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ix}\varphi_{ky}\varphi_{lz}. \tag{6,2}$$

Вспоминая, что $\varepsilon_{ikl} = 1$, если перестановка i, k, l четная, и $\varepsilon_{ikl} = -1$, если эта перестановка нечетная, мы видим, что правая часть равенства (6,2) совпадает с определителем, составленным из компонент тензора φ_{ik}, т. е.

$$|\varphi| = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{vmatrix}.$$

Выше мы видели, что сумма диагональных элементов тензора является скаляром. Теперь мы видим, что скаляром является и определитель, составленный из компонентов тензора.

Рассмотрим тензор ψ_{ik}, определяемый соотношением

$$\varepsilon_{ikl}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = \varepsilon_{abc}\psi_{ia}. \tag{6,3}$$

Легко видеть, что ψ_{ik} есть минор определителя $|\varphi|$, соответствующий элементу φ_{ik}.

Миноры ψ_{ik} определителя $|\varphi|$ удовлетворяют равенству

$$\psi_{ik} = |\varphi|\varphi_{ki}^{-1}, \tag{6,4}$$

где φ_{ik}^{-1} есть тензор, обратный тензору φ_{ik}. Для того чтобы доказать его, умножим равенство (6,1) на φ_{am}^{-1}. Тогда получим

$$|\varphi|\varepsilon_{abc}\varphi_{am}^{-1} = \varepsilon_{ikl}\varphi_{ia}\varphi_{am}^{-1}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = \varepsilon_{ikl}\delta_{im}\varphi_{kb}\varphi_{lc} = \varepsilon_{mkl}\varphi_{kb}\varphi_{lc}.$$

Согласно формуле (6,3) правая часть последнего равенства равна $\varepsilon_{abc}\psi_{ma}$. Поэтому $|\varphi|\varepsilon_{abc}\varphi_{am}^{-1} = \varepsilon_{abc}\psi_{ma}$ или $\varepsilon_{abc}(|\varphi|\varphi_{am}^{-1} - \psi_{ma}) = 0$, откуда и следует соотношение (6,4).

Равенство (6,4) можно переписать в виде

$$\varphi_{ik}^{-1} = \frac{\psi_{ik}}{|\varphi|}. \tag{6,5}$$

Эта формула дает способ вычисления компонент обратного тензора. Из нее видно, между прочим, что тензор, обратный тензору φ_{ik} существует в том и только в том случае, если определитель $|\varphi|$ отличен от нуля.

С помощью определителей легко решаются системы линейных уравнений. Напишем такую систему в виде

$$\varphi_{ik} U_k = V_i, \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{6,6}$$

где φ_{ik} — тензор, V_i — известный и U_i — неизвестный вектор. Умножив это уравнение на φ_{li}^{-1}, получим на основании равенств (3,4) и (6,5):

$$U_l = \frac{\psi_{il}}{|\varphi|} V_i. \tag{6,7}$$

В частности, если мы имеем систему линейных однородных уравнений

$$\varphi_{ik} U_k = 0, \tag{6,8}$$

то система имеет решение, отличное от тождественного решения $U_k = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3)$ только в том случае, если определитель $|\varphi|$ равен нулю. В самом деле, полагая в решении (6,7) все $V_i = 0$, мы видим, что если определитель $|\varphi|$ отличен от нуля, то все x_i обращаются в нуль.

Если определитель $|\varphi|$ системы однородных линейных уравнений равен нулю, то система имеет и не нулевые решения, причем величины U_k пропорциональны соответствующим минорам определителя

$$\begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & \varphi_{zz} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$U_k = a\psi_{pk}, \tag{6,9}$$

где p есть один из индексов x, y, z. Чтобы доказать справедливость решения (6,9) заметим, что из (6,4) следует для данного случая:

$$\varphi_{ik}\psi_{pk} = \delta_{ip}\,|\varphi| = 0,$$

откуда и

$$\varphi_{ik} U_k = a\varphi_{ik}\psi_{pk} = 0.$$

Рассмотрим два тензора второго ранга φ_{ik} и ψ_{ik}. Покажем, что определитель скалярного произведения этих тензоров равен произведению определителей этих тензоров. Действительно, пусть

$$\chi_{ia} = \varphi_{im}\psi_{ma}. \tag{6,10}$$

Согласно формуле (6,1)

$$|\chi|\,\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{ikl}\chi_{ia}\chi_{kb}\chi_{lc}.$$

Подставляя сюда выражения для χ_{ia}, χ_{kb} и χ_{lc} через φ_{ik} и ψ_{ik} и группируя соответствующим образом сомножители, получаем

$$|\chi|\varepsilon_{abc}=\varepsilon_{ikl}\varphi_{im}\varphi_{kn}\varphi_{lp}\psi_{ma}\psi_{nb}\psi_{pc}=|\varphi|\varepsilon_{mnp}\psi_{ma}\psi_{nb}\psi_{pc}=|\varphi||\psi|\varepsilon_{abc},$$

откуда и следует, что

$$|\chi|=|\varphi||\psi|. \qquad (6,11)$$

§ 7. Приведение тензора 2-го ранга к главным осям

Пусть S_{ik} — симметрический тензор 2-го ранга. Умножая какой-либо вектор A_i на этот тензор, мы получим, вообще говоря, новый вектор B_i, имеющий и другую величину и другое направление.

Поставим себе задачу нахождения таких векторов, которые при скалярном умножении на данный симметрический тензор не изменяли бы своего направления, деформируясь только по величине.

Другими словами, вектор A_i должен удовлетворять соотношению

$$S_{ik}A_k=\lambda A_i, \qquad (7,1)$$

где λ — произвольный скаляр. Так как $\lambda A_i=\lambda\delta_{ik}A_k$, то условие (7,1) эквивалентно системе уравнений

$$(S_{ik}-\lambda\delta_{ik})A_k=0. \qquad (7,2)$$

Система эта линейна и однородна. Как было доказано выше (§ 6) для того, чтобы она имела решения, отличные от нулевого $A_i=0$, определитель, составленный из коэфициентов уравнения и соответствующий тензору $S_{ik}-\lambda\delta_{ik}$, должен быть равен нулю:

$$|S_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0. \qquad (7,3)$$

Таким образом λ должно удовлетворять уравнению третьей степени. Это уравнение носит название *характеристического* или *векового уравнения.*

Если компоненты симметрического тензора S_{ik} вещественны, то, как легко видеть, все корни уравнения (7,3) также будут вещественными. В самом деле, умножая уравнение (7,3) скалярно на A_i^*, получим $S_{ik}A_i^*A_k=\lambda|A_i|^2$. Левая часть этого равенства в виду симметричности тензора S_{ik} равна своему комплексно-сопряженному значению

$$(S_{ik}A_i^*A_k)^*=S_{ik}A_iA_k^*=S_{ki}A_kA_i^*=S_{ik}A_i^*A_k.$$

Поэтому вещественна и правая часть равенства, а следовательно, и λ.

Таким образом можно утверждать, что уравнение (7,3) имеет три вещественных корня λ_1, λ_2 и λ_3. Эти корни именуются *характеристическими числами* тензора.

Если мы подставим значения λ в уравнение (7,2), то, соответственно различным значениям λ, мы получим три системы уравнений

$$(S_{ik}-\lambda_\alpha\delta_{ik})A_k^{(\alpha)}=0, \quad (\alpha=1,\ 2,\ 3) \qquad (7,4)$$

определяющих три вектора $A_k^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Так как уравнения (7,4) однородны, то эти векторы определены только в отношении их направления, но не абсолютной величины. При этом, как было доказано выше [см. (6,9)], компоненты вектора $A_k^{(\alpha)}$ пропорциональны соответствующим минорам определителя

$$\begin{vmatrix} S_{xx}-\lambda_\alpha & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy}-\lambda_\alpha & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz}-\lambda_\alpha \end{vmatrix}.$$

Так, например, взяв $\lambda = \lambda_1$, получим

$$\frac{A_x^{(1)}}{\begin{vmatrix} S_{yy}-\lambda_1 & S_{yz} \\ S_{zy} & S_{zz}-\lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{A_y^{(1)}}{\begin{vmatrix} S_{yz} & S_{yx} \\ S_{zz}-\lambda_1 & S_{zy} \end{vmatrix}} = \frac{A_z^{(1)}}{\begin{vmatrix} S_{yx} & S_{yy}-\lambda_1 \\ S_{zx} & S_{zy} \end{vmatrix}}. \tag{7,5}$$

Докажем теперь, что три направления векторов $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ и $A_i^{(3)}$ взаимно перпендикулярны. Для этого напишем, например, для векторов $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ по (7,1):

$$S_{ik} A_k^{(1)} = \lambda_1 A_i^{(1)}, \quad S_{ik} A_k^{(2)} = \lambda_2 A_k^{(2)}.$$

Умножим обе части первого равенства скалярно на $A_i^{(2)}$, а второго на $A_i^{(1)}$ и результаты вычтем. Тогда в силу симметричности S_{ik} слева получим тождественно нуль, так что

$$(\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)} = 0.$$

Отсюда при условии неравенства корней уравнения (7,3), следует

$$A_i^{(1)} A_i^{(2)} = 0,$$

что и доказывает перпендикулярность векторов $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$.

Итак, можно указать такие три взаимно перпендикулярных направления, что всякий вектор, совпадающий с одним из этих направлений, при умножении на симметрический тензор не поворачивается, а только изменяется по величине. Эти три направления называются *главными осями* симметрического тензора.

Повернем оси координат так, чтобы они совпали с главными осями тензора. Тогда в этой, как говорят, канонической системе координат, симметрический тензор примет канонический вид:

$$(S_{ik}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{7,6}$$

Действительно, в новой системе координат

$$S'_{ik} n_k^{(1')} = \lambda_1 n_i^{(1)'}, \quad S'_{ik} n_k^{(2)'} = \lambda_2 n_i^{(2)'}, \quad S'_{ik} n_k^{(3)'} = \lambda_3 n_i^{(3)'},$$

где $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ и $n^{(3)}$ — орты (единичные векторы) канонических осей. Проецируя эти равенства на оси координат и, принимая во внимание, что $n_x^{(1)'} = 1$, $n_y^{(1)'} = n_z^{(1)'}$ и т. д., получим

$$S'_{11} = \lambda_1, \quad S'_{12} = 0, \quad S'_{13} = 0,$$
$$S'_{21} = 0, \quad S'_{22} = \lambda_2, \quad S'_{23} = 0,$$
$$S'_{31} = 0, \quad S'_{32} = 0, \quad S'_{33} = \lambda_3.$$

Таким образом характеристические числа определяют компоненты тензора после приведения его к главным осям. Заметим, что эта операция именуется приведением тензоров к диагональному виду.

Относительно нахождения главных осей тензора заметим следующее. Если все корни характеристического уравнения равны друг другу, т. е.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \tag{7,7}$$

то тензор (7,6) сводится к произведению скаляра на единичный тензор $S'_{ik} = \lambda\delta_{ik}$, где λ — общее значение всех λ_a.

При умножении единичного тензора на произвольный вектор мы получим снова тот же вектор. Поэтому в рассматриваемом случае, когда все характеристические числа равны друг другу, любые направления в пространстве являются главными направлениями тензора. Выбор всех трех главных направлений совершенно произволен.

Если два характеристических члена равны друг другу:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \tag{7,8}$$

то выбор главных осей в плоскости, проходящей через какие-либо два соответствующих главных направления, произволен. Действительно, при условии (7,8) тензор (7,6) является единичным по отношению к векторам, лежащим в указанной плоскости.

Если тензор S_{ik} имеет вид

$$(S_{ik}) = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{yx} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz} \end{pmatrix}, \tag{7,9}$$

то операция приведения к главным осям упрощается. В самом деле уравнение (7,3) распадается на два уравнения:

$$S_{zz} = \lambda, \quad \begin{vmatrix} S_{xx} - \lambda & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7,10}$$

Таким образом ось z является одной из главных осей и S_{zz} есть одно из характеристических значений тензора. Два других, соответствующих главным осям в плоскости x, y найдем, решая уравнение (7,10).

УКАЗАТЕЛЬ

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
88	10 сн.	скоростей	координат	автора
109	2 св.	$\mathbf{V}$	$\mathbf{V}'$	издательства
109	3 св.	Ω	Ω'	»
119	18 св.	$\dot{\psi}_2$	$\dot{\psi}_L$	»
144	2 сн.	$2m$	2	автора
151	14 сн.	В правых частях уравнений (54, 21) знаки — опустить		»

Зак. 212. Л. Ландау и Л. Пятигорский. Механика.